École Royale
des
Ponts et Chaussées

1842 – 1843

Notes sur la mécanique appliquée aux principes de la stabilité des constructions et à la théorie dynamique des machines.

Chap. 1er *Récapitulation des notions essentielles de la mécanique rationnelle*

§: 1. Des diverses branches de la mécanique.

1. La Mécanique a pour objet les lois et les causes du mouvement et de l'équilibre des corps.

2. Les vérité générales, sans exception, appartenant à cette science, constituent la Mécanique rationnelle ainsi nommée parce que ses propositions sont des conséquences que le raisonnement déduit rigoureusement d'un petit nombre de principes ou lois de la nature. Toutefois la Mécanique rationnelle admet dans plusieurs de ses théories l'existence de corps jouissant de propriétés, telles que la parfaite dureté, la parfaite fluidité, etc. que les corps réels ne possèdent jamais complètement, et les propositions auxquelles la science arrive à l'aide de ces hypothèses ne se vérifient qu'avec plus ou moins d'approximations dans le monde réel.

3. La Mécanique rationnelle se divise en deux parties : la statique ou science de l'équilibre, la dynamique qui traite des relations du mouvement avec ses causes appelée forces.

4. La mécanique rationnelle est la base nécessaire de diverses sciences qui sont comme la branche de la Mécanique prise dans son acception la plus générale : telle sont l'Astronomie mathématique ou Mécanique céleste, la Physique mathématique, l'Hydraulique, la Théorie de la stabilité des constructions, la science des Machines ou Mécanique industrielle.

Les trois dernières sont des parties essentielles des connaissances utiles aux Ingénieurs des Ponts et chaussées.

La science des Machines, ou la Mécanique industrielle peut se diviser en plusieurs parties très importantes et tellement étendues qu'il ne peut être donné à personne de les posséder toutes complètement.

La première qui considère principalement dans les machines les transmissions de mouvement, et les relations auxquelles sont assujettis les mouvements divers de leurs parties, sans s'occuper de calculer l'intensité du moteur et des résistances, pourrait s'appeler la Mécanique géométrique parce que les procédés très variés et souvent fort ingénieux qu'elle emploie sont presque exclusivement fondés sur les règles de la géométrie.

7. La troisième partie est relative à la construction des machines : elle comprend la connaissance des matériaux, l'art de les assembler, et les règles propres à déterminer la figure et les dimensions de chaque pièce d'après les efforts qu'elle reçoit.

8. La quatrième partie de la Mécanique industrielle, qu'on peut désigner sous le nom de Technologie mécanique se rapporte aux instruments, dits machines outils, qui, conduits par les appareils de transmission de mouvement convenable, dans chaque cas, exécutent immédiatement les diverses opérations de l'industrie. Les objets dont s'occupe cette partie de la Mécanique sont en réalité le but auquel tendent les trois autres, mais la science possède à leur égard peu de préceptes généraux, et ils appartiennent pour la plupart à l'enseignement descriptif et à la pratique.

9. Ayant pris l'année dernière pour sujet de nos leçons l'hydraulique générale et les machines hydrauliques, nous nous occuperons cette année des autres parties de la Mécanique qui intéressent les Ingénieurs. La matière est tellement étendue que nous serons souvent obligés de nous borner aux généralités les plus importantes. D'ailleurs nous laisserons aux cours spéciaux de construction les développements qui leur appartiennent. Avant tout nous présenterons un résumé des notions essentielles de la Mécanique rationnelle qui nous serviront dans la suite de ce cours, et nous fixerons le sens de quelques expressions dont nous devrons faire usage.

§: 2. Du mouvement considéré indépendamment de ses causes.

10. Le mouvement d'un point, si la ligne droite ou courbe qu'il parcourt est connue, est déterminé dès que, ayant choisi un point fixe sur cette ligne, et le sens positif dans lequel on la conçoit engendrée, on a la relation entre la distance positive ou négative du mobile à ce point fixe et le temps écoulé à partir d'un instant appelé initial. De cette relation qui peut s'exprimer soit analytiquement par une équation $s = F(t)$, soit graphiquement par une courbe, on déduit la vitesse à un instant donné, dont l'expression analytique est $\gamma = \frac{ds}{dt}$, et dont la valeur, positive ou négative, peut s'obtenir, soit par le calcul de cette dérivée, soit par le tracé de la tangente à la courbe représentative du mouvement.

11. Quand la vitesse est constante, la distance s varie proportionnellement au temps. Le mouvement est alors dit uniforme ; son expression analytique est $\gamma = a$ ou $s = s_0 + at$. La vitesse a est d'ailleurs positive ou négative. Pour un mouvement uniforme déterminé l'expression numérique de a dépend du choix des unités de longueur et de temps.

En pratique, ce n'est que dans le mouvement uniforme qu'on peut observer directement la vitesse d'un point.(*)

12. Quand la vitesse d'un point est variable, on est conduit à considérer une quantité qui est l'accélération ; son expression analytique est $\frac{dv}{dt}$, et sa valeur, positive ou négative à un instant donné, s'obtient, soit par le calcul de cette dérivée, soit graphiquement en menant la tangente

(*) Voir le mémoire de M. Morin intitulé *Description des appareils chronométriques à style propres à la représentation graphique et à la détermination des lois du mouvement*, 1838.

au point correspondant d'une courbe dont les coordonnées sont proportionnelles au temps et à la vitesse.

Lorsque la vitesse et l'accélération sont de même signe le mouvement est accéléré, dans le sens vulgaire de ce mot, dans le cas contraire il est retardé.

Lorsque l'accélération est constante, (positive ou négative), le mouvement est dit uniformément varié ; et l'on a $\frac{dv}{dt} == j$ d'où $\gamma = \gamma_0 + jt$, d'où $s = s_0 + \gamma_0 t + \frac{1}{2} jt^2$. L'une quelconque de ces trois équations renferme implicitement les deux autres, saut la détermination des constantes s_0 et γ_0.

13. Lorsque la ligne que décrit un point mobile n'est pas connue à priori, son mouvement est déterminé dès que l'on connaît le mouvement de ses projections sur trois axes coordonnées. La vitesse du point dans l'espace est alors essentiellement positive et représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélépipède dont les trois côtés contigus représentent en grandeur et en direction les vitesses positives ou négatives des projections du mobile sur les axes coordonnés.

14. Un point *M* ayant un mouvement quelconque, si l'on conçoit que trois plans coordonnés formant un angle trièdre de figure invariable se meuvent aussi d'une manière quelconque dans l'espace, et si l'on suppose qu'un observateur entraîné à son insu dans le mouvement de ces axes, les considère comme fixes, on voit que cet observateur attribuera au point *M* un mouvement différent de celui que ce mobile possède réellement : ce mouvement apparent s'appelle mouvement relatif dans le système des axes mobiles supposés fixes. La vitesse de ce mouvement s'appelle vitesse relative.

15. Si à un instant déterminé on considère la position *A* du mobile *M*, ce point géométrique *A*, considéré comme lié invariablement aux axes mobiles, possède un mouvement dépendant uniquement de celui de ces axes. C'est ce que M. Coriolis a appelé le mouvement d'entraînement du mobile *M* à l'instant considéré. La vitesse actuelle du point *A* est la vitesse d'entraînement du point *M*.

16. On démontre aisément que la vitesse absolue est représentée en grandeur et en direction par la diagonale d'un parallélogramme dont deux côtés contigus représentent de même, l'un la vitesse d'entraînement, l'autre la vitesse relative.

17. Les divers mouvements d'un système solide peuvent se classer comme il suit.

1° Mouvement commun de translation, curviligne ou rectiligne, qui a lieu lorsque tous les points du système possèdent à chaque instant des vitesses égales, parallèles et de même sens.

2° Mouvement simple autour d'un axe fixe. Dans ce cas, fréquent dans les machines, les vitesses des divers points du système, à un même instant, sont proportionnelles aux distances *r* de ces points à l'axe fixe de rotation. C'est ce qu'on exprime par la formule $\gamma = wr$ dans laquelle la quantité ω, vitesse du point qui, lié au système, serait à l'unité de distance de l'axe, s'appelle vitesse angulaire du système solide à l'instant considéré. Si ω est variable avec le temps, la quantité $\frac{dw}{dt}$ est

l'accélération angulaire, qui est constante quand le mouvement de rotation est uniformément varié.

3° Mouvement de roulement cylindrique, ayant lieu quand le système solide est invariablement attaché à une surface cylindrique, à base quelconque, qui roule sans glisser sur une autre surface cylindrique fixe. A un instant quelconque les directions et les rapports des vitesses des différents points du système, sont les mêmes que si, à cet instant, l'arête de contact des deux cylindres était fixe. Cette arête qui n'est réellement pas fixe mais dont la vitesse est nulle à l'instant de contact s'appelle axe instantané de rotation. En réalité les arcs décrits, même pendant des temps très courts, ne sont pas des arcs de cercles.

4° Mouvement de rotation autour d'un point fixe qui a lieu quand le système est invariablement lié à un point qui reste fixe pendant le mouvement du système. À un instrument quelconque, il y a un axe instantané de rotation comme si le système était lié à une surface conique roulant sans glisser sur une autre qui serait fixe et aurait le même sommet.

5° Mouvement composé de translation et de rotation autour d'un axe, ayant lieu lorsqu'une droite *AB* liée invariablement à un système solide, a un mouvement commun de translation curviligne ou rectiligne, et reste par conséquent parallèle à sa position initiale, tandis que les points du système situés hors de cette droite ont un mouvement différent. On dit alors que le mouvement du système solide est composé du mouvement de translation de la droite *AB* et du mouvement de rotation relatif autour de cet axe, expression qui se rattache aux notions exprimées aux 12° 14, 15, 16.

6° Mouvement composé de translation et de rotation autour d'un point. Quelque soit le mouvement d'un système solide, si l'on imagine que par l'un de ses points *A*, on fasse passer trois axes coordonnés entraînés avec ce point *A* mais restant parallèle à leurs directions initiales, le mouvement du système relativement à ces trois axes se réduit à un mouvement de rotation autour du point *A*, considéré comme fixe (4°). Ainsi le mouvement le plus général d'un système solide peut être considéré comme composé du mouvement de translation déterminé par le mouvement absolu de l'un quelconque de ses points et d'un mouvement relatif de rotation autour de ce point.

§: 3 Des forces considérées indépendamment de la mesure de leurs effets.

18. Une force est la cause nécessaire et suffisante pour modifier la grandeur ou la direction de la vitesse d'un point matériel. Nous en acquerrons l'idée par la sensation des efforts que nous exerçons sur les corps.

Le point sur lequel une force s'exerce, et sans lequel elle ne peut exister, s'appelle un point d'application.

Plusieurs forces peuvent être appliquées simultanément à un même point suivant la même droite. La force unique à laquelle elles équivalent s'appelle leur somme. De là la notion du rapport de deux forces.

Toute force est comparable à un poids, c'est-à-dire à l'action de pesanteur sur un certain corps, en un lieu déterminé. L'unité de force est arbitraire. Nous adopterons dans les applications numériques le Kilogramme.

19. Si l'on projette une force F sur un axe des x, on a une force $F\cos(F\ ,\ x)$ ou, pour abréger, F_x, positive ou négative, tandis que la force F dans l'espace n'a ordinairement pas de signe.

20. On s'accorde généralement aujourd'hui à ne plus admettre de forces instantanées supposées sans durée et capables de produire dans les corps des changements brusques de vitesse, sans les faire passer par les états intermédiaires. Toute force a donc une certaine durée.(*)

21. Si la projection F_x d'une force est constante pendant un temps t, le produit $F_x\ t$ qui entre dans cet énoncé important sera appelé l'impulsion de la force F suivant l'axe des x pendant le temps t. Si la force F_x est variable, son impulsion pendant le temps $t - t_0$ est :

$$\int_{t_0}^{t} F_x\, dt\ .$$

22. Le point d'application de la force F décrivant une ligne droite ou courbe, par des causes quelconques, si l'on appelle ds un élément du chemin décrit, la quantité $F\ ds\cos(F\ ,\ ds)$ est le travail élémentaire de la force F pendant le parcours de l'arc ds. On peut le considérer sous deux aspects $F\ ds\cos(ds\ ,\ F)$ et $ds\ x\ F\cos(F\ ,\ ds)$.

L'intégrale de cette différentielle est le travail de la force F entre les mêmes limites. C'est ce qui s'exprime par la notation $\varphi F = \int F\ ds\cos(F\ ,\ ds)$. Selon qu'il est positif ou négatif, le travail est dit travail moteur ou travail résistant.

La force dont le travail est positif ou moteur, est une force mouvante, celle dont le travail est négatif ou résistant est force résistante(**).

23. L'expression travail d'une force, proposée par M. Coriolis et adoptée par M. Poncelet dans ses cours n'est pas encore exclusivement employée par les Mécaniciens. Cette même quantité a été appelée par Monge et Hachette effet dynamique, par Coulomb et Navier quantité d'action. Nous adopterons pour unité le Kilogrammètre = 1^k x 1^m. Montgolfier, Hachette, Clément ont appelé unité dynamique ou dynamique un travail de 1000 Kilogrammètre ; M. Coriolis l'a appelé dynamode. M. Dupin a appelé dyname un travail continu qui reviendrait à un million de kilogrammètres en 24 heures : l'usage n'a point consacré jusqu'ici ces dénominations.

(*) La doctrine qui repousse les forces instantanées a été professée par M. Poncelet à l'École de l'artillerie et du génie de Metz, dès 1825 et par M. Coriolis dans son *traité du calcul de l'effet de Machines* publié seulement en 1829, mais écrit plusieurs années auparavant. Elle a été admise par M. Poisson dans la 2e édition de son traité de Mécanique en 1835.

(**) Voir le mémoire déjà cité de M. Morin la description des appareils propres à mesurer soit l'impulsion, soit le travail développé par le moteur.

24. Le travail d'une force pour un parcours déterminé de son point d'application est, d'après sa définition une quantité indépendante du temps, c'est-à-dire de la durée de ce parcours. On a quelquefois besoin de désigner un travail indéfiniment prolongé, et qui conserve des valeurs égales pendant des temps égaux, on pourrait prendre pour unité de ce travail un Kilogrammètre par seconde, mais les mécaniciens pratiques commencent à s'accorder pour appeler cheval-vapeur ou cheval dynamique un travail continué de 75 kilogrammètres par seconde. Nous pensons que c'est improprement que cette quantité est quelquefois nommée force de cheval, traduction incorrecte de l'expression anglaise horse power, puissance de cheval, dans laquelle le mot puissance a le sens de capacité de travail. Il importe de ne pas confondre l'idée simple de force avec l'idée complexe de travail. Une force s'exprime en Kilogrammes ; un travail ou une puissance mécanique s'exprime en Kilogrammètres.

25. Dans le calcul de l'effet des forces appliquées aux divers points d'un système matériel, on a souvent à considérer la somme algébrique des travaux de ces forces (39), delà l'utilité des propositions suivantes dont la deuxième est d'ailleurs évidente.

26. Théorème. Lorsque deux forces égales et directement opposées sont appliquées à deux points en mouvement, si l'intensité de ses forces est constante ou ne varie qu'en fonction de la distance des deux points, la somme de leurs travaux ne dépend que du mouvement relatif des deux points, et est par conséquent égale au travail que l'une des deux forces produirait seule, si le mouvement du point auquel elle s'applique se réduisait à l'éloigner ou à le rapprocher de l'autre point supposé fixe.

27. Théorème. Si un système solide possède un mouvement commun de translation (17, 1°), la somme des travaux élémentaires des forces qui y sont appliquées, pendant un déplacement infiniment petit du système, est égale au chemin élémentaire d'un de ses points multiplié par la somme des projections des forces sur un axe parallèle à la vitesse de translation.

28. Théorème. Si un système solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, la somme des travaux élémentaires des forces qui y sont appliquées, pendant un déplacement angulaire infiniment petit du système, est égale à ce déplacement angulaire (c'est-à-dire au rapport de l'arc décrit par un point quelconque à son rayon) multiplié par la somme algébrique des moments des forces par rapport à l'axe de rotation.

On entend ici par moment d'une force par rapport à son axe, le produit qu'on obtient en multipliant la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe par la distance de la force à l'axe, et en affectant le résultat du signe + ou -, qui convient au travail de la force dans le mouvement de rotation dont il s'agit. Considérant une force F, son moment par rapport à un axe des x sera désigné par la notation

$$M\{F\}_x$$

§: 4. Dynamique d'un point matériel.

1° Mouvement rectiligne

29. Si la force qui sollicite un point matériel en mouvement sur une verticale est son poids . . . . . **P**.

Son accélération à un instant quelconque est indépendante de la nature du corps, et sa vitesse acquise. A Paris, quand on prend le mètre et la seconde pour unité, cette accélération est 9,8088 : nous la désignerons toujours par . . . . . **g**.

Sous une autre force . . . . . **F**.

Dirigée suivant la même droite que la vitesse préalablement acquise le même corps prend une accélération $\frac{dv}{dt}$ désignée par . . . . . **J**.

Cela posé, une loi de la nature qu'on peut appeler le principe des mouvements relatifs de translation donne

$$\frac{F}{J} = \frac{P}{g}$$

30. Si deux corps sous une même force prennent une même accélération on dit qu'ils ont la même masse. Si non, leurs masses sont proportionnelles aux valeurs du rapport $\frac{F}{J}$ variable pour des corps divers, mais constant pour un même corps ; et comme on est convenu de prendre pour unité de masse celle du corps qui sous l'unité de force prend l'unité d'accélération, le rapport $\frac{F}{J}$ devient l'expression numérique de la masse : si on la représente par m, on a :

$$\frac{F}{J} = m \quad \text{ou} \quad \frac{F}{m} = \frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad F\ dt = m dv\ ;$$

en prenant dans le même sens la direction positive de la force et celle de la vitesse, et en donnant à F et à dv les signes qui leur appartiennent par suite de cette convention.

31. De la dernière équation on tire

$$\int_{t_0}^{t} F\ dt = mv - mv_0$$

c'est-à-dire que l'impulsion de la force F est égale à l'accroissement algébrique de la quantité de mouvement entre les mêmes limites.

32. Les deux équations

$$F\ dt = m dv \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{dt} = v$$

permettent d'éliminer dt et donnent

$$F\ dx = mv dv \qquad \text{d'où} \qquad \int_{x_0}^{x} F\ dx = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

$\int F\,dx$ est le travail de la force F. Si $v_0 = 0$, la quantité $\frac{1}{2}mv^2$ est égale au travail positif ou moteur qui a imprimé cette vitesse au corps de masse m ; elle représente donc l'effet de ce travail. Si $v = 0$ la quantité $-\frac{1}{2}mv_0^2$ est égale au travail négatif ou résistant que le corps a reçu depuis l'instant ou sa vitesse était v_0 jusqu'à celui ou cette vitesse a été anéantie ; la quantité $-\frac{1}{2}mv_0^2$ exprime donc la capacité que possédait le corps considéré de vaincre un travail résistant en vertu de sa masse et de sa vitesse.

Cette quantité est la moitié de ce que la plupart des auteurs appellent force vive, expression née de l'application du mot force à la capacité de travail des moteurs. Nous l'appelons puissance vive expression dans laquelle le mot puissance répond à l'idée de cette capacité, et l'épithète vive répond à celle de la vitesse.

2° Mouvement curviligne

33. Les notions précédentes s'étendent au mouvement curviligne que l'on peut considérer de deux manières.

Ce mouvement peut être projeté sur un axe, et les équations des N^os^ 30, 31 et 32 subsistent pourvu qu'on remplace 1° la force F par la somme $\sum F_x$ des projections de forces sur l'axe supposé celui des x, 2° les vitesse v, v_0 par leurs projections v_x ,v_{0x} sur le même axe. C'est ce qu'on exprime en disant que : la projection d'un point matériel sur un axe se meut comme un point matériel de même masse, qui aurait pour vitesse initiale la projection de la vitesse initiales du point dans l'espace, et qui serait sollicité par une force égale à la somme algébrique des projections des forces simultanées.

On démontre aisément que, quelles que soient les forces appliquées à un même point, on peut trouver une force unique, qu'on appelle leur résultante, dont la projection sur un axe quelconque serait égale à la somme des projections des forces réelles considérées.

En désignant cette résultante par R, l'expression analytique de l'énoncé précédent est

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{R_x}{m} \qquad \text{d'où} \qquad mv_x - m_{0x} = \int R_x\,dt\ ,$$

formules dans lesquelles on peut remplacer R_x par $\sum F_x$.

Le mouvement curviligne peut être considéré suivant la courbe réellement décrite, mais abstraction faite de la courbure du chemin parcouru. Les équations des N^os^ 30, 31 et 32 existent encore, pourvu qu'on remplace 1) les distances rectilignes x, x_0 par les distances s, s_0 comptées suivant la courbe décrite, et 2° la force F par la force tangentielle $\varphi = \sum F\cos(F\ ,\ d_s)$ ou $R\cos(R\ ,\ d_s)$.

On a donc

$$v = \frac{ds}{dt}\ ,\quad \frac{dv}{dt} = \frac{\sum F\cos(F\ ,\ ds)}{m} = \frac{R\cos(R\ ,\ ds)}{m}$$

$$\text{d'où} \qquad mv - mv_0 = \sum \int F\cos(F\ ,\ ds)\,dl = \int R\cos(R\ ,\ ds)\,dt$$

et $$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum \int F \cos(F\ ,\ ds) = \sum \zeta\{F\} = \zeta\{R\}\ .$$

Si l'on décompose la résultante R en deux forces rectangulaires dont l'une soit la force tangentielle φ, l'autre composante ψ est dans le plan de la courbe décrite, ou dans le plan osculateur, si la courbe est à double courbure, suivant la normale à cette courbe, et dans le sens allant de la courbe au centre de courbure. Cette force normale est la force centripète ; son expression est, en désignant par r le rayon de courbure,

$$\psi = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{ou} \qquad \psi = mw^2 r$$

en appelant ω la vitesse angulaire autour du centre de courbure.

§: 5 Principes généraux du mouvement d'un système de points matériels

Un système de points matériels est soumis à deux espèces de forces, les unes extérieures, dues à des corps ne faisant point partie du système, les autres mutuelles, entre les éléments du système.

Le théorème de la quantité de mouvement, d'un système quelconque peut se réduire à ces termes : la somme des quantités de mouvement projetées sur un axe quelconque, est indépendante des actions mutuelles, et par conséquent son accroissement est égal à la somme des impulsions des forces extérieures projetées sur le même axe. L'expression analytique de ce principe est, en désignant par F les forces extérieures,

$$\sum mv_x - \sum mv_{0x} = \sum \int F_x\, dt\ .$$

Le théorème du mouvement du centre de gravité consiste en ce que le centre de gravité d'un système quelconque se meut comme un point matériel qui réunirait à lui seul la masse $\sum m$ du système, et qui serait sollicité par les forces extérieures transportées en ce point parallèlement à elles-mêmes. Ainsi toutes les propriétés rappelées au §: 4 sont applicables sans aucune modification au mouvement du centre de gravité d'un système matériel quelconque, solide ou non solide, moyennant le transport fictif des forces extérieures et de la masse du système en ce point.

Dans le cas où le corps est solide, non seulement le centre de gravité se meut comme si toutes les forces y étaient transportées, mais en plus, le corps tourne autour de ce point comme s'il était fixe, les forces extérieures restant les mêmes en intensités et direction passant par leurs points réels d'application.

39. Le théorème de l'effet de travail consiste en ce que l'accroissement de la puissance vive du système est égal au travail des forces extérieures, plus à celui des actions mutuelles, dépendant uniquement du mouvement relatif des points du système.

L'expression analytique de ce principe est

$$\sum \frac{1}{2}mv_x - \sum \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum \zeta\{F\} + \sum \int fdl$$

en désignant par f les forces mutuelles, supposées positives quand elles sont répulsives, et par dl la variation de distance des deux points du système entre lesquels s'exerce la force f.

40. Dans le cas où le système est supposé solide, les variations de distance dl sont nulles, et le terme $\sum \int fdl$ disparaît. La même disparition est admissible dans le cas d'un liquide peu visqueux dont les molécules ont un mouvement relatif peu rapide. L'expérience apprend dans quel cas cette hypothèse est permise.

41. Le terme $\sum \zeta F$ prend une expression simple lorsqu'il s'agit du travail de la pesanteur : il est égal au poids du système, multiplié par la hauteur verticale dont le centre de gravité s'est abaissé. Si le centre de gravité s'était élevé, ce travail serait négatif.

42. Le terme $\sum \frac{1}{2} mv^2$ prend aussi une expression simple lorsqu'il s'agit d'un corps solide tournant autour d'un axe. Cette expression de la puissance vive est :

$$\frac{1}{2} w^2 \sum mr^2$$

ω étant la vitesse angulaire, m la masse d'un des points du système et r sa distance à l'axe de rotation. La somme $\sum mr^2$ s'appelle le moment d'inertie du corps solide par rapport à l'axe fixe autour duquel il tourne.

43. Le calcul du travail des forces est l'objet le plus essentiel de la théorie dynamique des machines. On s'occupe sous un point de vue secondaire des intensités des forces qui agissent aux divers points de ces appareils pour assurer la solidité de leur construction et pour pouvoir tenir compte des frottements. Ainsi l'effort ou la pression qu'un agent moteur est capable d'exercer sur son récepteur, c'est-à-dire sur ses points d'application dans une machine, est d'une importance accessoire ; il en est de même de l'intensité de la force qu'il faut exercer en certains points d'une machine outil pour la mettre ou pour la maintenir en mouvement. La question principale, quand au moteur, est de savoir quel est le travail qu'il exerce sur son récepteur, et, quant à la machine outil, quel est le travail qu'elle exige pour fonctionner. Ces deux questions étant résolues, par le concours de l'expérience et de la théorie, le principe général de l'effet de travail montre que s'il était possible d'établir entre le récepteur et l'outil un appareil de transmission sans chocs ni frottements, il suffirait de diviser le travail que donne le moteur par celui qu'exige une machine-outil pour savoir combien de machines pareilles le moteur entretiendrait en mouvement. Ce résultat est une limite supérieure qu'on ne peut jamais atteindre parce qu'il faut toujours retrancher du travail moteur le travail résistant dû aux frottements et aux chocs des parties de l'appareil de transmission entre elles et contre leurs supports.

44. On a beaucoup disputé dans le 18^{e} siècle sur la mesure des forces des corps en mouvement. Dans le cas très simple d'un corps solide possédant un mouvement commun de translation, on réduisait la question à savoir « si la force d'un corps qui a une certaine vitesse, devient double ou quadruple quand sa vitesse devient double »[(*)]. Il est évident qu'on donnait alors au mot force un sens différent de celui que nous adoptons (18) ; et en effet on admettait

(*) D'Alembert : *Éloge de Bernoulli.*

l'existence de forces instantanées (20), et en parlant d'un corps en mouvement, et abandonné à lui-même, on disait que sa force restait la même, que cette force se conservait sans cesse,(*) comme si elle était à chaque instant la cause actuelle du mouvement. Suivant les idées modernes la force est non la cause subsistante de tout mouvement existant, mais la cause qui modifie tout mouvement variable. Un corps abandonné à lui-même n'exerce ni ne reçoit actuellement aucune force ; et si l'on demande quelle est la force qui a produit ce mouvement ou quelle est celle qui l'anéantirait, cette question est indéterminée : mais la quantité de mouvement mv du corps considéré fait connaître l'impulsion $\int F\,dt$ de la force demandée, qui est double quand la vitesse devient double ; tandis que la puissance vive $\frac{1}{2}mv^2$ fait connaître le travail $\int F\,dv$ de cette force, lequel devient quadruple quand la vitesse est double. Ainsi les philosophes qui comme Newton et Euler, mesuraient ce qu'ils appelaient la force d'un corps en mouvement par le produit de sa masse par sa vitesse, appelaient force la quantité complexe que nous appelons impulsion ; et ceux qui comme Leibnitz, et Bernoulli., prenaient pour mesure le produit de la masse par le carré de la vitesse donnaient le nom de force à la quantité complexe que nous nommons travail.

§: 6 Statique ou conditions générales de l'équilibre des corps

45. Lorsqu'un système matériel, solide ou non solide, est en repos, chacun de ses points est en équilibre avec l'influence des forces F qui lui sont propres, et des actions mutuelles f qu'il reçoit des autres points du système.

Si l'on imagine que sous l'action des forces F le système soit d'ailleurs libre dans l'espace, on peut concevoir une infinité de mouvements possibles du système dans lesquels les forces accompagnent leurs points d'application. Ces mouvements qui n'existent que dans la pensée s'appellent mouvements virtuels et sont ordinairement supposés infiniment petits.

Si, parmi les mouvements virtuels, on ne considère que ceux dans lesquels les distances respectives des points du système restent invariables, on a les mouvements virtuels compatibles avec la solidité du système.

Le système étant en équilibre, il est évident que pour produire réellement un de ces derniers mouvements il suffirait d'appliquer simultanément à chacun des points du système une certaine force φ constante ou variable capable de déterminer le mouvement propre à ce point, comme s'il était libre. Donc en appliquant à chaque point le théorème du n° 32, et faisant la somme des équations ainsi obtenues, on a, après un déplacement quelconque :

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = \sum \zeta\{\varphi\}$$

mais puisqu'il s'agit d'un système soumis alors aux deux espèces de forces extérieures désignées par F et φ, et puisque les actions mutuelles ne produisent aucun travail dans ce système dont les divers points conservent leurs distances, on a suivant le n° 39,

(*) Laplace : *Exposition du système du monde.* Liv. 3 Chap. 2

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = \sum \zeta\{F\} + \sum \zeta\{\varphi\}\,.$$

De ces deux équations on conclut $\sum \zeta\{F\} = 0$; c'est ce que constitue le théorème du travail virtuel (ou, suivant l'expression ordinaire, le théorème des vitesses virtuelles) qu'on peut énoncer ainsi :

Théorème. Un système matériel quelconque étant en équilibre, la somme algébrique du travail des forces extérieures est nulle pour tout mouvement virtuel quelconque compatible avec la solidité du système.

De là se déduisent comme on va le voir, les six conditions générales de l'équilibre d'un système.

46. Si pour mouvement virtuel on choisit un mouvement commun de translation parallèle à un axe des x, en appelant ξ le déplacement commun de tous les points on aura (27)

$$\sum \zeta\{F\} = \xi \sum F_x \;; \qquad \text{donc} \qquad \sum F_x = 0.$$

Ainsi pour trois axes coordonnés on a

$$\sum F_x = 0\,, \qquad \sum F_y = 0\,, \qquad \sum F_z = 0\;;$$

ce qui revient à dire que le centre de gravité du système reste en repos, s'il y est d'abord.

47. Si pour mouvement virtuel on choisit un mouvement de rotation autour d'un axe des x, en désignant par σ l'arc décrit par un point lié au système et situé à l'unité de distance de l'axe on a (28)

$$\sum \zeta\{F\} = \sigma \sum M\{F\}_x \;; \qquad \text{donc} \qquad \sum M\{F\}_x = 0\,.$$

Ainsi pour trois axes coordonnés on a

$$\sum M\{F\}_x = 0\,, \qquad \sum M\{F\}_y = 0\,, \qquad \sum M\{F\}_z = 0\,.$$

48. Lorsque le système considéré est supposé solide, hypothèse qui ne se réalise jamais parfaitement, les six conditions précédentes sont, de plus, suffisantes pour l'équilibre.

Pour le démontrer on établit d'abord la proposition suivante :

Théorème. Lorsque dans un système de points d'application de forces quelconques on ne considère que les mouvements virtuels compatible avec la solidité, les forces quelles qu'elles soient peuvent toujours se réduire à deux, dont l'une au moins passe par un point donné, sans rien changer à la somme des travaux virtuels ; c'est-à-dire que dans tous les mouvements de l'espèce indiquée ces deux forces, dites équivalentes aux forces réelles, font la même somme de travail virtuel que feraient les forces réelles.

Lorsque les deux équivalentes se réduisent à une seule, cette force unique s'appelle la résultante des forces réelles.

49. Cela posé, on démontre aisément que lorsque les six équations des N^{os} 46 et 47 ont lieu, les deux équivalentes sont égales et opposées ; qu'ainsi la résultante est nulle ; que par conséquent le système, s'il est supposé solide, est nécessairement en équilibre, parce qu'il ne peut pas y avoir vitesse acquise sans travail.

Cette proposition et celles des N^{os} 46 et 47 se résument en ces termes

Théorème. Dans un système en équilibre la somme des projections des forces extérieures, sur un axe quelconque, est nulle, et la somme des moments de ces mêmes forces par rapport à un axe quelconque est ainsi nulle. Si le système est solide, pour que l'équilibre ait lieu, il suffit que la double condition des projections et des moments ait lieu pour trois axes concourants non dans un même plan.

50. Les cas particuliers de l'équilibre des forces situées dans un plan, et des forces parallèles dans l'espace, sont compris dans ce théorème général.

Chap. 2. *Application de la statique aux systèmes articulés sans frottement.*

§:1 Théorie applicable aux ponts suspendus

51. On suppose la charge totale répartie aux points d'attache des tiges verticales de suspension ; ainsi la chaîne ou le câble se trouve ainsi assimilé à un polygone funiculaire. Les tensions des tiges sont supposées les mêmes que si les travées, au lieu de former un système rigide, étaient simplement articulées, de manière que les tiges équidistantes supportent des charges égales.

Voici à ce sujet un théorème qui ne suppose pas les tiges équidistantes ; la démonstration suivante a été indiquée par M. Guillebon (Annales des Ponts et chaussées – janvier 1839)

Si les sommets d'un polygone funiculaire supportent des charges verticales proportionnelles aux distances des tiges de suspension, c'est-à-dire de manière que δ', δ'' étant les distances projetées horizontalement de trois sommets consécutifs, la charge du sommet intermédiaire soit représentée par $p\,\frac{\delta'+\delta''}{2}$, en désignant par p le poids correspondant à une unité de longueur horizontale, tous les sommets sont une parabole de second degré dont l'axe principal est vertical.

Soient (fig. 1)

$M_0, M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots M_n,$ plusieurs sommets consécutifs du polygone funiculaire, comprenant entre eux n côtés de ce polygone,

$Y_0, Y_1, Y_2, \ldots\ldots\ldots Y_n,$ leurs ordonnées verticales au-dessus d'une horizontale quelconque 0_x

$X_0, X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n,$ leur abscisse $OP_0, OP_1, OP_2, \ldots\ldots\ldots OP_n,$ à partir de $O,$ projection du milieu du côté NM_0 qui précède le sommet M_0 ,

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n,$ les angles que font au-dessus de l'horizon les côtés $NM_0, M_0M_1, M_1M_2, \ldots\ldots\ldots M_{n-1}M_n$.

$T_0, T_1, T_2, \ldots\ldots\ldots T_n,$ les tensions de ces mêmes côtés.

La portion $M_0, M_1, \ldots\ldots\ldots M_{n-1}$ du polygone est soumise à deux sortes de forces extérieures ; les unes sont verticales, et leur somme est égale à p multiplié par $\frac{x_n + x_{n-1}}{2}$, distance du point O au milieu de l'intervalle $P_{n-1}P_n$; les autres sont les deux tensions T_0, T_n dirigées la première suivant M_0N, la seconde suivant $M_{n-1}M_n$

Appliquant à ces forces les formules du n° 46, on a

$$T_n \sin \alpha_n = p\,\frac{x_n + x_{n-1}}{2} + T_0 \sin \alpha_0 ,$$

et

$$T_n \cos \alpha_n = T_0 \cos \alpha_0$$

Cette dernière équation applicable à deux tensions quelconques exprime que les projections horizontales de toutes les tensions ont une valeur constante. Nous la représenterons par T_x .

Les deux équations précédentes donnent, d'après cette notation

$$tang\ \alpha_n = \frac{p}{2\,T_x}\,(x_n + x_{n-1}) + tang\ \alpha_0$$

or
$$tang\ \alpha_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\,.$$

Substituant on trouve :

$$y_n - y_{n-1} = \frac{p}{2\,T_x}\,(x_n^2 - x_{n-1}^2) + tang\ \alpha_0\,(x_n - x_{n-1})$$

si dans cette formule on fait successivement *n = 1, 2, 3 . . . . . n* on obtient *n* équations. En les ajoutant et supprimant ensuite l'indice *n* on obtient la formule applicable à une somme quelconque

$$y - y_0 = \frac{p}{2\,T_x}\,(x^2 - x_0^2) + tang\ \alpha_0\,(x - x_0)\,,$$

qui établit la proposition énoncée.

Remarque. Si l'on change l'origine des coordonnées, en transportant les axes parallèlement l'équation conservera la même forme

$$y = \alpha\,x^2 + bx + c\,,$$

et le coefficient α de x^2 sera toujours $\frac{p}{2\,T_x}$.

52. Trois points, ou deux points et la situation de la tangente horizontale, suffisent pour déterminer la parabole dont il s'agit.

Le coefficient α de x^2 étant trouvé en fonction des coordonnées des points donnés, on en déduira T_x par la relation $\alpha = \frac{p}{2\,T_x}$

d'où
$$T_x = \frac{p}{2\,\alpha}\,.$$

On aura ensuite une tension quelconque T_n par la formule $T_n \cos\alpha_n = T_x$, dans laquelle on fera

$$\cos\alpha_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{(y_n - y_{n-1})^2 + (x_n - x^{n-1})^2}}$$

53. L'application de la théorie précédente à une des chaînes d'un pont suspendu est immédiate lorsque les poids à supporter sont supposés proportionnels aux longueurs des parties du plancher projetées horizontalement. Il faut observer que le point A' (fig. 2), où la chaîne rencontre la verticale du point d'appui du plancher sur la culé, est sur la parabole qui continue tous les sommets du polygone, mais que le point d'attache de la chaîne est hors de cette courbe s'il diffère de A'.

54. Dans la pratique les tiges de suspension sont équidistantes et ont des tensions égales. Les tiges situées dans un même plan sont souvent supportées par plusieurs chaînes indépendantes. La courbe sur laquelle doivent alors se trouver les sommets de chaque

polygone funiculaire est la même pour toutes les chaînes et on peut la déterminer, ainsi que la somme de leurs tensions, en raisonnant comme s'il n'y avait qu'une seule chaîne.

On dispose alors les tiges de manière à réaliser l'un des cas suivants

1^er^ cas (fig. 3) : Les deux côtés inférieurs sont symétriques par rapport à la verticale, ce qui a lieu lorsque entre deux points situés au même niveau il y a un nombre pair de côtés.

Dans ce cas, M_0 est le sommet de la parabole. Son équation, rapportée aux axes coordonnées O_x et O_y, est de la forme

$$y = ax^2$$

Le coefficient a est toujours lié à la tension horizontale (51) par la relation $a = \frac{p}{2T_x}$, et la situation d'un seul point de la courbe par rapport aux axes suffit pour déterminer la constante a, indépendamment du poids p et de la tension T_x. Soient données, par exemple, la flèche $BM_0 = p$ et la demi corde $A'B = c$ on aura

$$p = a(c^2 - x_0^2) \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \frac{p}{c^2 - x_0^2}$$

et un sommet quelconque $y = \frac{p}{c^2} x^2$

2^e^ cas (fig. 4) : Un côté est horizontal ; il est alors le plus bas de tous. C'est ce qui arrive lorsqu'entre deux points situés au même niveau il y a un nombre impair de côtés. Dans ce cas, le sommet de la parabole est sur la verticale passant par le milieu du côté horizontal, et, si l'on prend pour origine des coordonnées ce milieu qui n'est pas sur la courbe, l'équation est de la forme $y = ax^2 + b$; et comme la courbe passe par M_0 on a $O = ax_0^2 + b$ et l'équation devient, (comme on l'obtiendrait en faisant $y_0 = 0$ et $tang\ \alpha_0 = 0$ dans l'équation finale du n° 51)

$$y = a(x^2 - x_0^2)$$

x_0 est alors la moitié du côté horizontal, c'est-à-dire la moitié de l'intervalle de deux tiges de suspension quelconques.

Soient donnée la flèche $BO = b$ et la demi corde $A'B = c$;

on aura $p = a(c^2 - x_0^2)$ d'où $\alpha = \frac{p}{c^2 - x_0^2}$

et pour un sommet quelconque $y = \frac{p}{c^2 - x_0^2}(x^2 - x_0^2)$

55. Dans les deux cas précédents, on trouvera la tension horizontale T_x par la relation , dans $T_x = \frac{pc^2}{2p}$ le second $T_x = \frac{P(c^2 - x_0^2)}{2p}$.

La tension d'un côté quelconque du polygone sera trouvée comme on l'a vu au n° 52, en remarquant que la différence $x_n - x_{n-1}$ est l'intervalle constant de deux tiges consécutives ; et que , $y_n - y_{n-1}$ différence de deux ordonnées consécutives, se déduira de l'équation de la courbe.

56. Si le plancher est dans un plan, la longueur des tiges de suspension étant les ordonnées équidistantes d'une parabole, parallèle à l'axe principal, leurs différences secondes sont égales entre elles. Il suffit donc de calculer trois de ces ordonnées pour obtenir les autres pas de simples additions.

Il en sera de même lorsque le profil longitudinal du plancher sera une parabole à axe principal vertical.

57. Il résulte de l'équation

$$T_n \cos \alpha_n = T_x \qquad \text{d'où} \qquad T_n = \frac{T_x}{\cos \alpha_n}$$

que la tension augmente avec l'inclinaison des côtés de la chaîne.

Elle augmente proportionnellement à leur longueur ; car, en appelant δ l'intervalle de deux tiges consécutives, et l_n la longueur du côté dont T_n est la tension, on a

$$\cos \alpha_n = \frac{\delta}{l_n}\ , \qquad \text{d'où} \qquad T_n = \frac{T_x\, l_n}{\delta}$$

Si α est l'angle du dernier côté avec l'horizon, et T sa tension, qui est la plus grande de la chaîne, on a

$$T = \frac{T_x}{\cos \alpha}$$

mais on détermine approximativement ce maximum de tension en remarquant que l'inclinaison du dernier côté est un peu moindre que celle de la tangente à la parabole en A'. L'équation de cette parabole étant suivant les cas

$$y = ax^2 \qquad \text{ou} \qquad y = a\left(x^2 - x_0^2\right),$$

on a toujours $\frac{dy}{dx} = 2\,ax$. Si donc on désigne par β l'angle à l'horizon de la tangente au point extrême qui a pour abscisse $x = c$, on aura

$$tang\, \beta = 2\,ac \qquad \text{d'où} \qquad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tang^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,a^2\,c^2}}$$

or, de $\beta > \alpha$ on déduit que $\beta < \cos \alpha$, puisque les angles α et β sont moindre qu'un angle droit :

donc $$\frac{T_x}{\cos \alpha} \qquad \text{ou} \qquad T < \frac{T_x}{\cos \beta}$$

ou en remplaçant T_x et $\cos \beta$ par leur valeur,

$$T < \frac{p}{2\,a}\sqrt{1 + 4\,a^2\,c^2}$$

substituant pour a sa valeur on aura dans le premier cas, (où $a = \frac{p}{c^2}$)

$$T < \frac{pc^2}{2\,p}\sqrt{1 + \frac{4\,p^2}{c^2}}$$

et dans le second cas (où $a = \frac{p}{c^2 - x_0^2}$)

$$T < \frac{p\,(c^2 - x_0^2)}{2\ p} \sqrt{1 + \frac{4\ b^2\ c^2}{(c^2 - x_0^2)^2}}$$

Quand le nombre de tiges de suspension est très grand, x_0 est très petit par rapport à c, et l'on peut sans erreur possible, prendre dans les deux cas

$$T = \frac{pc^2}{2\ p} \sqrt{1 + \frac{4\ p^2}{c^2}}$$

58. On peut calculer immédiatement la somme des portions de tiges situées au-dessus de l'horizontale qui passe par les sommets les plus bas du polygone

1er cas (54) : L'équation de la parabole est

$$y = ax^2 \quad \text{et l'on a} \quad a = \frac{p}{c^2}$$

Désignons par n le nombre de tiges de suspension à partir du point le plus bas de la chaîne jusqu'au sommet M_n, et par δ l'intervalle constant de deux tiges consécutives, nous aurons

pour les points	$M_0, M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots\ M_n$
ayant pour abscisses	$0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta \ldots\ldots\ldots\ n\delta,$
les ordonnées	$0,\ a\delta^2,\ a(2\delta)^2,\ a(3\delta)^2, \ldots\ a(n\delta)^2,$
dont la somme est	$a\delta^2(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^2).$

Or la somme des carrés des nombres entiers consécutifs depuis *1* jusqu'à n a pour expression

$$\frac{1}{6}\ n\,(n+1)\,(2\ n+1)$$

donc la somme cherchée est

$$\frac{1}{6}\ n\,(n+1)\,(2\ n+1)\,\frac{p\ \delta^2}{c^2}$$

2e cas (54) : L'équation de la parabole est dans le 2e cas

$$y = a\,(x^2 - x_0^2)$$

dans laquelle $a = \frac{p}{c^2 - x_0^2}$ et $x_0 = \frac{1}{2}\ \delta$

pour les points	$M_0,\ M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots\ldots\ M_n$
ayant pour abscisses	$x_0,\ 3x_0,\ 5x_0,\ 7x_0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2n+1)x_0$
les ordonnées sont	$0,\ a(3^2\text{-}1)x_0^2,\ a(5^2\text{-}1)x_0^2,\ a(7^2\text{-}1)x_0^2, \ldots\ a[(2n+1)^2\text{-}1]x_0^2$
et leur somme est	$a\ x_0^2\ [1 + 3^2 + 5^2 + 7^{2\ldots} + (2n+1)^2] - a\ x_0^2\ (n+1).$

or la somme des carrés des nombres impairs consécutifs a pour expression

$$\frac{1}{6}\,(2\ n+1)\,(2\ n+2)\,(2\ n+3)$$

donc en mettant pour x_0 et a leurs valeurs $\frac{\delta}{2}$ et $\frac{4\ p}{4\ c^2 - \delta^2}$, la somme cherchée sera égale à

$$\left[\frac{1}{6}(2n+1)(2n+2)(2n+3)-(n-1)\right].\frac{p\,\delta^2}{4\,c^2-\delta^2}.$$

59. La longueur l de chaque côté de la chaîne peut se calculer exactement par la formule

$$l_n=\sqrt{\delta^2+(y_n-y_{n-1})^2}$$

Mais il est utile d'avoir immédiatement la longueur totale d'une demi chaîne, à partir du point le plus bas, ou du milieu du côté horizontal : on peut l'obtenir approximativement.

Cette longueur diffère peu de celle de la parabole circonscrite. Un élément ds de cette courbe a pour expression :

$$\sqrt{dx^2+dy^2} \qquad \text{ou} \qquad dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

or, des équations $y=ax^2$ et $y=a(x^2-x_0^2)$ on tire également

$$\frac{dy}{dx}=2\,ax \qquad \text{d'où} \qquad ds=\sqrt{1+4\,a^2\,x^2}\,dx$$

Mais l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ étant ordinairement petite par rapport à *1*, on peut sans erreur notable remplacer la quantité sous le radical par $(1+2\,a^2\,x^2)^2$ qui n'en diffère que de $\frac{1}{4.}(\frac{dy}{dx})^4$. On trouve ainsi que l'élément ds est un peu moindre que $(1+2\,a^2\,x^2)\,dx$. En intégrant, on conclut que s, depuis l'origine jusqu'à l'abscisse c est un peu plus petit que $c+\frac{2}{3}\,a^2\,c^3$.

Dans le premier cas, la valeur de a est $\frac{p}{c^2}$ et dans le second $\frac{p}{c^2-\frac{1}{4}\delta^2}$; mais on peut négliger $\frac{1}{4}\,\delta^2$ auprès de c^2 ; de sorte que l'expression approchée de la longueur de la demi chaîne est dans les deux cas

$$s=\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{p^2}{c^2}\right)c$$

60. Si la longueur s prend un petit accroissement par l'effet des variations de température, par exemple, et que l'on veuille calculer l'accroissement correspondant de la flèche p, on y parviendra en regardant ces accroissements comme infiniment petits et différenciant l'équation ci-dessus, ce qui revient à négliger le carré de l'accroissement de p.

On aura

$$ds=\frac{4}{3}\,\frac{p}{c}\,dp \qquad \text{d'où} \qquad dp=\frac{3}{4}\,\frac{c}{p}.\,ds\ ;$$

comme s diffère peu de c, si l'on met cette équation sous la forme

$$\frac{dp}{p}=\frac{3}{4}\,\frac{c^2}{p^2}.\,\frac{ds}{s},$$

on voit que l'accroissement proportionnel de p est beaucoup plus grand que celui de s.

§:2 Système polygonaux de corps solides à articulations simples

61. Imaginons que plusieurs corps solides se touchent par des points qui ne peuvent se séparer : aucun obstacle, aucun frottement ne s'opposant d'ailleurs aux mouvements de rotation compatibles avec cette condition. Nous nous arrêterons d'abord au cas ou chaque corps n'en touche que deux autres, chacun par un point, et le système sera alors polygonal.

On peut se figurer chaque articulation comme produite par l'assemblage dit genou, consistant en une petite sphère adhérente à l'un de ses corps, et enveloppée d'une portion de sphère creuse tenant à l'autre corps. (l'assemblage dit charnière ne permet la rotation que perpendiculairement à l'axe, et ne laisserait par conséquent pas au système toute la liberté de mouvement supposée ici)

Il s'agit d'étudier les conditions d'équilibre d'un tel système.

62. D'abord considérons séparément l'un des corps solides du système. Il est sollicité par des forces extérieures $F_1, F_2, F_3, \ldots\ldots$ quelconques et en outre par les pressions également extérieures qu'il reçoit des deux corps avec lesquels il est lié ; et ces pressions N', N'' passent par les centres C, D des sphères d'articulation, (fig. 5) attendu qu'il n'y a pas de frottement. Les six conditions d'équilibre sont remplies par l'ensemble de ces forces, et sont suffisantes puisqu'il s'agit d'un corps solide.

L'une de ces conditions peut être rendue indépendante des pressions N', N'' : elle consiste en ce que la somme algébrique des moments des forces $F_1, F_2, F_3, \ldots\ldots$ par rapport à la droite CD est nulle, ce que, si l'on prend CD pour axe des z, sera exprimé par la notation

$$\sum M\{F\}_z = 0$$

Cette condition revient à dire que les forces $F_1, F_2, F_3, \ldots\ldots$ peuvent se réduire à deux équivalentes appliquées aux points C et D. En effet on sait (48) que dans tous les cas on est libre de faire passer l'une des équivalentes en 1er ; dans le cas actuel le moment de la seconde équivalente devant être nul, à cause de $\sum\{F\}_z = 0$, cette force est dans un même plan avec l'axe CD, et si l'on joint son point d'application, quel qu'il soit, avec les points C et D par deux droite, on pourra toujours décomposer cette force en deux passant par ces points. On voit par là que si les centres d'articulation C, D sont maintenus par une résistance infinie, la condition $\sum M\{F\}_z = 0$ suffira pour assurer l'équilibre.

Les cinq autres conditions d'équilibre, auxquelles doivent toujours satisfaire toutes les forces extérieures, y compris les pressions N', N'', fourniront des relations entre ces pressions et les forces F ou leurs équivalentes.

A cet effet, si par C on mène deux axes C_x, C_y rectangulaires entre eux et sur C_x, qu'on désigne par $N'_x, N'_y, N'_z, N''_x, N''_y, N''_z, F_x, F_y, F_z$, les projections des forces sur les axes, et qu'on fasse $CD = l$, on a cinq autres équations où entrent les pressions.

$\sum M\{F\}_x + l\,N''_y = 0$, $\sum M\{F\}_y + l\,N''_x = 0$, $\sum F_x + N'_x + N''_x = 0$, $\sum F_y + N'_y + N''_y = 0$, $\sum F_z + N'_z + N''_z = 0$; les quatre premières suffisent pour déterminer N'_x, N'_y, N''_x, N''_y ; mais la dernière ne donne que la somme $N'_z + N''_z$.

Prenons pour exemple un corps soutenu par les deux pointes d'un tour. La connaissance des forces F, telles que le poids du corps, la tension de la corde, la pression de l'outil, déterminera les pressions perpendiculaires à l'axe, mais non les pressions dans la direction de cet axe. On conçoit, en effet, que l'on pourrait, sans troubler l'équilibre, faire varier ces dernières, pourvu que leur somme algébrique restât la même.

63. Examinons maintenant l'équilibre d'un système polygonal de corps solides articulés entre eux.

Chaque corps considéré à part est en équilibre, (remarque analogue à la première du n° 45) donc (62) les forces F agissant sur ce corps, en dehors de ses articulations, avec les deux corps contigus, ont la somme algébrique de leurs moments nulle par rapport à la droite qui joint les centres de ces articulations ; et attendu que ce corps est supposé rigoureusement solide les forces réelles F peuvent être remplacées sans troubler l'équilibre par deux équivalences appliquées à ces deux articulations.

En faisant la même modification des forces extérieures pour chaque corps solide du système, on transformerait celui-ci en un assemblage de corps rigides qui ne seraient soumis à aucune force excepté en leurs points d'articulation ; dès lors la figure et la masse de chaque corps deviendraient indifférentes dans la question, pourvu que la distance de ces deux articulations restât la même. On pourrait donc considérer le système comme composé de barres droites rigides sans pesanteur, formant un polygone dont les sommets seraient seuls soumis à des forces extérieures. En un mot on aurait ainsi un système qui ne différerait d'un polygone funiculaire proprement dit, qu'en ce que les côtés seraient rigides et pourraient par conséquent être pressés longitudinalement, et supporter ce qu'il serait permis d'appeler une tension négative.

La transformation dont nous venons de parler est fréquemment employée par les auteurs ; elle peut quelquefois être commode, mais elle n'est pas indispensable, et quelques exemples simples vont montrer comment on peut, sans y avoir recours, procéder dans l'étude des conditions d'équilibre d'un système de corps articulés, et dans le calcul des pressions qui ont lieu aux articulations.

64. Deux corps liés entre eux par l'articulation mobile M, (fig 6) et pouvant tourner autour des articulations fixes A, B, sont sollicitées par des forces F, F' verticales, rencontrant les droites AM, MB. On demande les pressions en A, B et M qu'il importe de connaître pour s'assurer ensuite si les pièces du système peuvent résister aux efforts qu'elles supportent. Il faut pour l'équilibre que le plan AMB soit vertical ; car le système entier est en équilibre sous l'action des forces F, F' et des deux pressions également extérieures qu'il reçoit aux deux articulations extrêmes AB ; d'où il est facile de conclure que les forces F, F' coupent la droite AB . Soient N, N', ces pressions en A et B, dont les projections horizontales et verticales sont $N_x N_y$, $N'_x N'_y$, quantités positives ou négatives suivant que les composantes qu'elles représentent agissent dans le sens des axes A_x, A_y ou dans le sens contraire.

Cela posé nous ferons deux remarques :

Premièrement le corps MB est en équilibre sous la force F' et les pressions en M et B : donc les moments par rapport à un axe horizontal projeté en M donnent (voir la figure pour la signification des lettres).

$$[\,1\,] \qquad F'_B z + N'_x b' - N'_y a' = 0$$

dans laquelle N'_x et N'_y doivent être prises avec leurs signes

Secondement, l'ensemble des deux corps est en équilibre sous les forces F, F', N, N'.
Donc les moments par rapport à un axe horizontal A donnent

$$[\,2\,] \qquad F\,x + F'\,x' + N'_x\,b - N'_y\,c = 0$$

et la condition de la nullité de la résultante de translation s'exprime en outre par les deux équations

$$[\,3\,] \text{ et } [\,4\,] \qquad N_x + N'_x = 0\ ,\ N_y + N'_y - (F + F') = 0$$

Les quatre équations ci-dessus suffisent pour déterminer les quatre quantités N_x, N_y, N'_x, N'_y et par conséquent les pressions N *et* N', leur direction et leur sens.

Au point M chacun des corps exerce sur l'autre une pression. Soit N'' la pression que le corps AM exerce sur le corps MB.

On aura $[\,5\,]$ et $[\,6\,]$ $\quad N''_x + N'_x = 0\ ,\ N''_y + N'_y - F' = 0$.

On aurait pu, au lieu de l'équation [2], en obtenir une autre, en remarquant que, d'après l'équation [1], les forces F' et N' ont une résultante passant par M ; donc on peut sans changer les conditions d'équilibre les transporter en ce point parallèlement à elles-mêmes. Alors l'équation des moments par rapport à l'axe passant en A devient

$$F_x + F'_a + N'_x\,b - N'_y\,a = 0$$

Mais cette équation est implicitement renfermée dans les équations [1] et [2] qui la donnent par soustraction.

On serait encore arrivé à un système d'équations équivalent à [1], [2], [3], [4], en considérant l'équilibre du corps MB autour de M, puis celui du corps MA autour de M, et enfin la nullité de la résultante de translation, exprimée par les équations [3] et [4].

Remarque. Après avoir trouvé, au moyen des six équations du 1er degré du n° 64 les six quantités $N_x, N_y, N'_x, N'_y, N''_x, N''_y$ en fonction des forces F, F', et des diverses coordonnées, si l'on venait à changer les signes des forces F, F', ce qui revient à supposer qu'elles agissent dans le sens positif de l'axe A_y on trouverait pour les projections des pressions les mêmes valeurs absolues, mais des signes contraires. C'est ce qui aurait lieu si le système pesant indiqué par la fig. 6 était remplacé par un autre situé symétriquement au-dessous de l'horizontale A_x .

On traitera de même le cas de la fig. 7 où les points d'articulation A et B sont sur une verticale.

Équilibre de AM autour de M :

$$N_x\,b' + N_y\,b + P\,(b - a) - F\,(c - b) = 0$$

Équilibre du système autour de B :

$$N_x\, b + Pa + P'\, a' + Fc = 0$$

Équilibre de translation :

$$N_x + N'_x = 0 \;\; ; \;\; N_y + N'_y + F + P + P' = 0$$

calcul de la pression N'' que BM reçoit en M de la part du corps supérieur :

$$N''_x + N'_x = 0 \;\; ; \;\; N''_y + N'_y + P' = 0$$

68. Si les articulations AB avaient lieu sur un cylindre vertical retenu par un collier en C (fig. 8) et par une crapaudine en D, ce collier, sans frottement exercerait une pression horizontale X, et la crapaudine une pression oblique Q. On aurait :

Moments par rapport à D : $XK + Pa + Fc + P'\, a' = 0$

Translation : $Q_x + X = 0$; $Q_y + (F + P + P') = 0$;

trois équations pour déterminer X, Q_x, et Q_y.

69. Système de quatre corps symétriques, quant aux dimensions et aux forces, par rapport à la verticale $M'C$. (fig. 9). Les forces extérieures, hors des articulations A, B sont supposées verticales.

La pression de MM' sur $M'M''$, et celle de $M'M''$ sur MM', à l'articulation M' sont nécessairement symétriques, mais de plus elles sont égales et directement opposées ; donc elles sont horizontales.

Il suffit donc d'étudier l'équilibre du système de la fig. 10 dans lequel N' est une force horizontale inconnue, P et P' les résultantes verticales des forces agissant sur les corps AM, MM'.

L'équilibre de MM' donne l'équation des moments

$$N'\, h' = P'\, \xi$$

L'équilibre de l'ensemble des deux corps donne

1° Moments $\qquad N'\, h = P_x + P'_x$

2° Translation $\qquad Q_x = N' \;\; ; \qquad Q_y = P + P'$

Des deux équations des moments on tire :

$$\frac{P_x + P'_x}{h} = \frac{P'\, \xi}{h'}$$

équation de condition qui servira à résoudre divers problèmes relatifs à l'équilibre du système dont il s'agit.

Cette équation resterait la même si les forces P, P' changeaient de signe, c'est-à-dire de sens, ou bien si les forces agissant toujours de haut en bas la figure était remplacée par une autre symétrique à la première par rapport à A_x.

70. La dernière équation n'étant pas supposée satisfaite, on demande quelle force horizontale X il faudrait appliquer en M à l'un ou à l'autre des deux corps articulés en ce point pour obtenir l'équilibre.

Par les mêmes considérations on a

$$N' h' = P' \xi$$

$$N' h = P_x + P'_x + X b$$

d'où $$X = \left(\frac{P' \xi}{h'} - \frac{P_x + P'_x}{h} \right) \frac{h}{b}$$

X est la tension d'un fil dont le poids serait négligeable, et qui joindrait les points M,M'', (fig. 9).

71. On procéderait d'une manière analogue pour des cas plus compliqués.

Soit un nombre quelconque de corps solides consécutifs liés par des articulation M', M'', M''' . . . . M^n les deux corps extrêmes sont en outre assujettis à ne se mouvoir qu'en tournant autour des articulations A,B dont les centres sont fixes. Les $n + 2$ points A, M', M'' . . . . $M^{(n)}$, B sont dans un même plan. Les $n + 1$ corps sont sollicités par des forces extérieures F_1', F_2' . . . . F_1'', F_2'' . . . . F_1''', F_2''' connues et situées dans le même plan, mais d'ailleurs quelconques. On demande de vérifier si l'équilibre existe, et dans le cas de l'affirmative, de trouver les pressions des appuis A, B et les pressions mutuelles en M', M'', M'''.

Premièrement, en procédant comme au n° 64 on vérifiera l'équilibre du système des deux corps contigus AM', $M'M''$; et dans le cas de l'affirmative on déterminera la pression N qu'exerce l'appui A, celle N' que le corps AM' exerce sur son voisin, et celle N'' que $M'M''$ exerce en M'' sur $M''M'''$.

Secondement le corps $M''M'''$ étant en équilibre sous l'action des forces N'', F_1''', F_2'''... et de la force qu'il reçoit en M''' du corps contigu, on vérifiera cette condition soit par la composition successive des forces connues dont la résultante devra passer en M''', soit par la propriété des moments pris par rapport à M''' ; et si elle est satisfaite la résultante de translation des forces F_1''', F_2''', ... N'' sera précisément la pression N''' que le corps considéré, $M''M'''$, exerce en M''' sur son voisin $M'''M^{IV}$.

Troisièmement, le corps $M'''M^{IV}$ devant être en équilibre sous l'action des forces connues F_1^{IV}, F_2^{IV}, ... et N''', et de la force qu'exerce en M^{IV} le corps contigu $M^{IV}M^V$ on procédera de même pour vérifier cet équilibre et déterminer la pression N^{IV} exercée en M^{IV} sur le corps $M^{IV}M^V$.

Ainsi de suite jusqu'à la dernière partie du système articulé.

§: 3 Des systèmes à liaison complète.

72. Un système de corps solides liés entre eux est dit système à liaison complète, lorsque ces corps sont tellement unis entre eux et avec d'autres corps fixes que le mouvement d'un point quelconque du système détermine complètement le mouvement de tous les autres, et que chacun de ces points ne peut se mouvoir que sur une certaine ligne droite ou courbe.

Exemple : les diverses balances, celle dite point à bascule, celle de Quintenz, celle de Roberval ; deux balanciers liés par un parallélogramme ; les engrenages.

73. Lorsque dans le mouvement que peut prendre un pareil système il est permis de négliger les frottements, c'est-à-dire le travail des actions mutuelles des corps entre eux et celui des

réactions des corps fixes, le principe le plus général et ordinairement le plus commode pour trouver la condition d'équilibre est le théorème du travail virtuel.

Il consiste en ce que pour que l'équilibre ait lieu, il faut et il suffit que les forces extérieures soient telles que leur travail total serait nul si le mouvement possible du système était supposé avoir lieu.

La démonstration de ce théorème très important résulte de celle qui a été donnée (45) en vue d'établir les six conditions générales de l'équilibre d'un système matériel.

1° La condition ci-dessus énoncée est nécessaire : en effet elle a lieu pour chaque corps solide du système en joignant aux forces qui lui sont propres les actions mutuelles qu'il reçoit des autres corps voisins. Or, par hypothèse, la somme totale du travail des actions mutuelles des corps entre eux est nulle. Donc si, après avoir posé pour chaque corps l'équation exprimant la condition dont il s'agit, on fait la somme de toutes les équations, on trouvera que le travail total des seules forces extérieures est aussi nul.

2° Cette condition suffisante : car si elle est satisfaite il est impossible que le système supposé en repos se mette en mouvement, puisqu'il y aurait puissance vive acquise sans travail des forces, ce qui ne se peut (39).

L'application du théorème du travail virtuel aux systèmes indiqués au n° 72 se réduit à des questions de géométrie.

74. Balances à bascule (fig. 11) Un tablier *AA* sur lequel se pose le corps à peser, est articulé à charnière en un point *B* lié invariablement avec un levier *ED* dont l'axe fixe est en *D*. Un autre levier *HF* dont l'axe fixe est en *I*, est uni au tablier *AB* et au levier inférieur *ED* par deux tiges *GK*, *FE* articulées à leurs extrémités. À l'extrémité *H* est suspendu un petit plateau. Les poids des diverses parties de l'appareil sont réglés de manière que, le tablier et le plateau étant vide les tiges *GK, FE* sont verticales, ainsi que les plans diamétraux des couteaux des diverses articulations. Cette position d'équilibre à vide est aussi celle de l'équilibre qui a lieu quand le tablier et les plateaux sont chargés des poids *Q* et *P*. À cet effet les articulations sont situées de manière que (comme on va le voir) dans un mouvement virtuel de l'appareil tous les points tels que *K A B A,* liés invariablement au tablier, s'élèvent ou s'abaissent de quantités égales, de sorte que tandis que le point *B* décrit un petit arc de cercle autour de *D*, le plan *AA* du tablier reste horizontal. Moyennant cette condition, le travail virtuel du poids de l'objet posé sur le tablier est le même que si ce poids était appliqué en *K*, et l'appareil fonctionne comme une romaine *HIG* et l'on a $P : Q :: I_g : I_b$.

Il ne reste qu'à voir comment on satisfait à la condition du mouvement de translation du tablier. Menons par *D* et par *I* les horizontales qui rencontrent en *b, e, f, g*, les verticales *Bb, Ef, GK*, et supposons ces horizontales liées aux leviers *DE, IF*. On voit aisément : 1° que le déplacement virtuel de *B*, projeté verticalement, est égal à l'arc élémentaire vertical que décrit le point b et que nous appellerons ζ ; 2° que les déplacements verticaux de *e* et de *f* sont égaux entre eux, étant respectivement égaux à ceux de *E* et de *F* projetés verticalement ; qu'ainsi le

déplacement virtuel de f est $\zeta \frac{\overline{De}}{\overline{Db}}$; 3° que le déplacement virtuel de K projeté verticalement est égal à ceux de G et de g, et que ce dernier, comparé à celui de f, est $\zeta \cdot \frac{\overline{De}}{\overline{Db}} \cdot \frac{\overline{Ig}}{\overline{If}}$. En égalant cette dernière quantité à ζ on trouve la relation cherchée

$$\frac{\overline{Db}}{\overline{De}} = \frac{\overline{Ig}}{\overline{If}}$$

75. Pont levis. (fig. 12) A est l'axe de rotation du tablier, B le point d'attache de la chaîne BC, G le centre de gravité du tablier et P son poids. D est l'axe de rotation de la charpente mobile supérieure, G' le centre de gravité de toute cette charpente, Q son poids, C le point d'attache de la chaîne CB à l'extrémité de la flèche. On fait en sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. Dès lors AB, CD restent dans leur mouvement, constamment parallèle. Donc le travail du poids P appliqué en G est le même que serait celui d'un poids égal P appliqué au point G_1 situé par rapport à DC comme G l'est par rapport à AB. Cela posé, pour que l'équilibre subsiste dans une position quelconque, abstraction faite du poids de la chaîne BC et des frottements, il faut et il suffit que la droite G_1G' passe par D, ou en d'autres termes, que GA soit parallèle à DG' et qu'on ait

$$Q \ : \ P \ :: \ GA \ : \ DG'$$

§: 4 Des systèmes à articulations alternatives.

76. Soit $ABCD$ (fig.13) un corps solide, reposant sur un autre corps LM par une face dont les projections sont AB et $a\ e\ b\ c\ d$, sans pouvoir s'en détacher par glissement, mais avec la possibilité de tourner autour d'un point ou d'une arête quelconque du périmètre de cette face. Le corps AC étant sollicité par diverses forces en dehors du plan AB ; il faudra pour que le repos subsiste que ces forces soient en équilibre avec les résistances que le corps LM exerce sur le corps AC, et qui toutes, partant des points de la face AB se dirigent vers le corps AC. Donc si, pour un point (A, a) quelconque du périmètre de la face de contact, on imagine un axe (se projetant en A), qui ne traverse pas cette face, il faudra que la somme des moments par rapport à cet axe, des forces telles que $F_1, F_2 \ldots\ldots$ à moins qu'ils ne soient nuls ce qui a lieu quand les forces F ont une résultante passant par A.

77. Cas particulier : Lorsque les forces qui sollicitent le corps $ABCD$, indépendamment de la résistance de LM, ont une résultante, la condition précédente revient à dire que cette résultante doit être dirigée du corps vers la face de contact, et en rencontrer le plan dans l'intérieur ou au moins sur le périmètre du plus petit polygone convexe entourant les points de contact.

78. L'équilibre dans le cas de l'inégalité des moments, indiquée au n° 76, a ce caractère remarquable que les forces $F_1, F_2, F_3, \ldots\ldots$ peuvent dans certaines limites, varier indépendamment les unes des autres sans que le corps AC auquel elles s'appliquent prenne un mouvement sensible ; ce qui tient à ce que les réactions du corps résistant LM se modifient de manière à satisfaire aux conditions d'équilibre ; tandis que dans les systèmes à articulation

simple, le moindre changement dans l'intensité ou la direction de l'une des forces extérieures produit en général le mouvement.

L'équilibre dans lequel les forces autres que les réactions des appuis peuvent ainsi varier en plus ou en moins jusqu'à un certain point sans production de mouvement, constitue la stabilité proprement dite.

79. Lorsque les forces F ont une résultante (77) les réactions du corps LM en ont aussi une, laquelle est égale et opposée à la première ; mais il ne s'ensuit pas qu'on puisse déterminer l'intensité et la direction de ces réactions pour chaque portion donnée de la surface de contact. Dans la mécanique rationnelle qui admet l'existence de corps parfaitement durs et parfois polis, on conclut de cette hypothèse que pour l'équilibre du corps AC il faut que la résultante R des forces F soit perpendiculaire au plan AB des points de contact ; et si ces points sont réduits au nombre de trois on détermine aisément la réaction normale de chacun de ces points, mais s'il y a plus de trois points de contact le problème posé dans l'hypothèse de l'invariabilité de figure du corps est indéterminé, tandis qu'il est déterminé dans l'état réel des corps en vertu de leur compressibilité et de leur élasticité.

80. On peut faire disparaître l'indétermination dont il s'agit à l'aide d'une hypothèse dont l'exactitude est suffisante pour la pratique. Pour l'énoncer et en expliquer les conséquences considérons un cas simple. Soit AA' (fig. 14) la face polygonale par laquelle le corps mobile s'appuie sur un autre ; et supposons que le premier soit sollicité par diverses forces F dont la résultante R est perpendiculaire à $A'A''$. Concevons que, avant l'application de ces forces et lorsque le corps était dans l'état naturel, on ait mené dans le corps solide un plan $B'B''$ parallèle à $A'A''$ et très voisin. Cela étant, on suppose que les molécules qui se trouvaient dans le plan $B'B''$ se rapprochent de celles qui occupent le plan $A'A''$, mais de manière que les unes et les autres se trouvent respectivement dans deux plans $b'b''$, $A'A''$; enfin on suppose que les réactions qui s'exercent aux divers points A', A, A'', étant rapportée à l'unité de surface, sont proportionnelles aux quantités $B'b'$, $B''b''$ dont les distances d'abord égales $A'B'$, AB, $A''B''$ se trouvent diminuées. Ainsi en faisant $B'b' = h'$, $B''b'' = h''$ et en général $Bb = h$ si l'on désigne par ω un élément superficiel en A, et par p la pression par unité de surface en ce point on aura pour la pression totale sur cet élément

$$\omega\, p = K\ h\ \omega$$

K étant une constante. Or $h\,\omega$ est le volume du cylindre qui a ω pour base et Bb pour hauteur. Donc on pourra prendre tous les volumes pareils comme représentant les pressions sur les divers éléments superficiels de $A'A''$; d'où il suit que la résultante de toutes ces pressions est représenté par le volume total du prisme tronqué $B'b'b''B''$ et passe par son centre de gravité. Et comme cette résultante est directement opposée à R, il s'ensuit que R passe par ce même centre de gravité. Ainsi pour connaître la distribution des diverses réactions depuis A' jusqu'à A'', étant donné R, la question se réduira à trouver ce plan $b'b''$ tel que le prisme tronqué ait son centre de gravité sur le prolongement de R.

81. Si, par exemple, la face de contact est un parallélogramme dont $A'A''$ soit un côté, et que la force R soit dans un plan qui coupe en leurs milieux les côtés projetés en $A'A''$, le centre de gravité du prisme tronqué $B'b''$ sera projeté en G, centre de gravité du trapèze $B'b'b''B''$. Cela posé soit $B'G = a$, $B'B'' = l$ on aura, par la théorie connue des moments,

$$(h' + h'')\, a = \frac{1}{3}\, l\, (h' + 2\, h'') \quad \text{d'où} \quad \frac{h'}{h''} = \frac{2 - 3\,\frac{a}{l}}{3\,\frac{a}{l} - 1} \qquad [\,1\,]$$

D'après le n° précédant en désignant par Ω l'aire totale de la face $A'A''$, la pression totale P sera représentée par $\Omega\left(\frac{h'+h''}{2}\right)$, tandis que les pressions, par unité de surface, le long des arêtes A', A'', pressions que nous désignerons par p', p'' seront représentées par h' et h''. On a donc

$$p' : P :: h' : \Omega\left(\frac{h' + h''}{2}\right) \quad \text{ou} \quad p' = \frac{2}{1 + \frac{h'}{h''}} \cdot \frac{P}{\Omega} \qquad [\,2\,]$$

de même

$$p'' = \frac{2}{1 + \frac{h'}{h''}} \cdot \frac{P}{\Omega} \qquad [\,3\,]$$

Les équations [1], [2], [3] donnant les pressions extrêmes p', p'', on en conclura aisément au besoin la pression en un point quelconque A.

82. La nature de la question exige que les quantités h' et h'' soient toutes deux positives à moins que l'une d'elles ne soit nulle, ce qui exige d'après [1] qu'on ait à la fois

$$2 \geq 3\,\frac{a}{l} \quad \text{et} \quad 3\,\frac{a}{l} \geq 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{l} \leq \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{a}{l} \geq \frac{1}{3}$$

Dans le cas particulier où l'on aurait $a = \frac{1}{3}\, l$ on trouverait

$$h'' = 0\,, \quad p'' = 0 \quad \text{et} \quad p = 2\,\frac{P}{\Omega}\,.$$

Ainsi sur l'arête A'' la plus éloignée de R la pression serait nulle, tandis que le long de l'arête A', la plus rapprochée, la pression rapportée à l'unité de surface serait double de la pression moyenne par unité de surface dans l'étendue $A'A''$.

Maintenant si a est $< \frac{1}{3}\, l$, il est naturel d'admettre que la pression totale se répartit sur une longueur $3\,a$ au lieu de l. Soit b la dimension de la force de contact, dans le sens perpendiculaire à $A'A''$; il faut alors dans la proportion [2] mettre pour Ω le produit $3\,ab$ en même temps que $h'' = 0$, d'où résulte le maximum de pression par unité de surface

$$p' = \frac{2}{3}\,\frac{P}{ab}$$

83. La question suivante peut donner lieu à une application de cette théorie.

Deux pièces solides *AM′*, *M′B*, reposent sur deux plans invariables *AA′, BB′*, et s'arc-boutent mutuellement suivant ma face *MM′*. Connaissant les résultantes *FF′* des forces qui sollicitent ces pièces, indépendamment des pressions mutuelles en *MM′*, et des réactions des appuis *AA′, BB′*, on demande quelles sont ces pressions dans le cas simple où les forces *F, F′* sont dans un plan perpendiculaire aux faces de contact *AA′, BB′, MM′*, et passants par les centres de figure de ces faces.

Si l'on admet que les résultantes *N, N′′* des réactions des appuis *AA′, BB′*, et celle *N′* des pressions mutuelles sur *MM′*, passent en des points *C, D, E* pris arbitrairement sur les faces, la question se trouve analogue à celle du n° 64 et se résout sans difficulté. On peut en outre déterminer les pressions par unité de surface, près des arrêtes *A, A′, M, M′, B, B′*. Mais si l'on se donne pour condition que ces pressions ne doivent point dépasser une certaine limite, le choix des points *C, D, E*, quoique toujours indéterminé, se trouve beaucoup plus restreint, parce que ces points ne doivent pas être rapprochés des arêtes, à moins d'une distance qu'on déterminera par un procédé de tâtonnement.

84. Les mêmes considérations se retrouvent dans toutes les questions relatives à la stabilité des systèmes à articulations alternatives. L'exemple ci-après est susceptible d'applications nombreuses.

Soit un système *E I i I_1 E_1 e E* (fig. 15) de pièces symétriques, quant aux dimensions et aux forces, par rapport à la verticale *e i V*.

Ces corps sont assemblés entr'eux et avec les corps inférieurs fixes sur lesquels le système s'appuie, de manière que les corps extrêmes peuvent tourner alternativement autour des arêtes *I, E, I_1, E_1* ; que les corps *e A′, e A'_1* peuvent se détacher partiellement en tournant autour de l'une ou de l'autre des arêtes *i e* que les corps *e A′*, *B′A′′* sont de même liés par une articulation alternative en *A′* et *B′* ; ainsi de suite. Nous nous bornons au cas où les résultantes *F′, F′′, . . .* des forces extérieures connues sont dans un plan vertical en avant et en arrière duquel la figure du système est symétrique, et nous vous proposons 1° de chercher les conditions de la stabilité du système, 2° de déterminer les pressions des pièces entre elles et sur les deux appuis.

D'abord, on verra comme au n° 69 que les résultantes des pressions réciproques qui s'exercent en *ie* sont horizontales, et que l'on peut considérer que les corps compris entre *IE* et *ie*, ce dernier plan étant sollicité en un point inconnu *c* par une force inconnue *N*.

Ainsi le corps *A′e* se trouve en équilibre sous l'action des forces *N* et *F′*, et des réactions qu'il reçoit du corps *A′B″*, lesquelles ont leurs résultantes passant en un point *C′* entre *A′* et *B*. Généralement l'assemblage iA_nB_ne d'un nombre quelconque de parties du système, comprises entre les points *ie*, A_nB_n, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui sont 1° la force horizontale *N* passant en *c* entre *i* et *e* ; 2° les forces *F′, F″*....., $F^{(n)}$ connues. 3° la résultante (passant en $C^{(n)}$ entre $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$) des réactions ou pressions que le corps inférieur au plan $A^{(n)}B^{(n)}$ exerce sur le corps supérieur à ce plan.

Il s'ensuit que si l'on considère les moments de ces forces par rapport à la droite projetée en $A^{(n)}$, le moment de la force N est égal à la somme des moments des forces F', F'', ..., $F^{(n)}$ par rapport au même axe. C'est ce que nous écrirons ainsi

$$N\,\zeta^{(n)} > \sum M\{F', F'' \ldots F^{(n)}\}_{A^{(n)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

en appelant $\zeta^{(n)}$ l'ordonnée verticale du point $A^{(n)}$ au dessous du plan horizontal passant par c.

De même tout le système compris entre EI et ei est en équilibre sous l'action de la force N, de toutes les forces F, et d'une résultante passant en C des pressions exercées de bas en haut par l'appui, sur le corps supérieur au plan EI ; d'où l'on conclura aisément que si l'on prend les moments par rapport à l'arête extérieure E on aura

$$\sum M\{F\}_E > N_\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

en appelant η l'ordonnée verticale de E au-dessous du plan horizontal passant par c.

Les deux inégalités [1] et [2] peuvent être regardées comme exprimant que si le système se composait de 2 pièces solides $E\,I\,A^{(n)}\,B^{(n)}$, $B^{(n)}\,A^{(n)}\,i\,e$, le mouvement qui consisterait dans l'affaissement du joint ie et la rotation de la pièce inférieure autour de E ne pourrait avoir lieu.

En multipliant les deux inégalités semblables [1] et [2] on a :

$$\zeta^{(n)} \sum M\{F\}_E > \eta \sum M\{F', F'' \ldots F^{(n)}\}_{A^{(n)}} \ldots\ldots\ldots [3]$$

Maintenant pour faire disparaître de cette inégalité les hauteurs $\zeta^{(n)}$, η qui restent toujours indéterminées, on remarque que si l'on appelle $z^{(n)}$ et h les ordonnées des points $A^{(n)}$ et E au-dessous du plan horizontal passant en e on a

$$\frac{z^{(n)}}{h} > \frac{\zeta^{(n)}}{\eta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [4]$$

attendu que les deux termes de la première fraction excèdent ceux de la seconde d'une même quantité $c\,e$. En multipliant les deux inégalités semblables [3] et [4] on trouve

$$\frac{\sum M\{F\}_E}{h} > \frac{\sum M\{F', F'', \ldots F^{(n)}\}_{A^{(n)}}}{z^{(n)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [5]$$

Le 1er membre de cette inégalité a une valeur unique ; le 2e membre au contraire prend diverses valeurs selon qu'on l'applique à l'un des points A', A'' . . . de l'intrados du système. L'inégalité [5] peut se résumer en disant que la force exprimée par le quotient

$$\frac{\sum F\{F\}_E}{h}$$

doit être plus grande que la plus grande des valeurs que prend le quotient

$$\frac{\sum F\{F', F'' \ldots F^{(n)}\}_{A^{(n)}}}{z^{(n)}}$$

quand on fait varier l'indice n.

Nous venons de considérer les mouvements $A^{(n)}$ et E, l'un à l'intrados, l'autre à l'extrados ; et les deux inégalités [1] et [2] nous ont permis d'éliminer N. Nous obtiendrons un résultat analogue en considérant les axes de moments $B^{(n)}$ et I, le 1er à l'extrados, le second à l'intrados. On voit par des raisonnements semblables aux précédents qu'on a

$$N\ \psi^{(n)} < \sum M \left\{F',\ F''\ \ldots\ F^{(n)}\right\}_{B^{(n)}} \ldots\ldots\ldots\ldots [\ 1^{\text{bis}}\ ]$$

en appelant $\psi^{((n))}$ l'ordonnée de $B^{(n)}$ au dessous de l'horizontale passant par c ;

$$\sum M \{F\}_I < N\ \chi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\ 2^{\text{bis}}\ ]$$

en appelant χ l'ordonnée de I au dessous de la même horizontale ;

$$\frac{y^{(n)}}{k} < \frac{\psi^{(n)}}{\chi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\ 4^{\text{bis}}\ ]$$

en appelant $y^{(n)}$ et k les ordonnées de $B^{(n)}$ et de I au dessous de l'horizontale passant par i.

En multipliant entre elles ces trois inégalités, on trouve

$$\frac{\sum M \{F\}_I}{k} < \frac{\sum M \left\{F',\ F''\ \ldots\ F^{(n)}\right\}_{B^{(n)}}}{y^n} \ldots\ldots [\ 5^{\text{bis}}\ ]$$

c'est-à-dire que la force exprimée par le premier membre de cette inégalité doit être plus petite que la plus petite des valeurs que prend le second membre quand on fait varier l'indice n.

Les inégalités [5] et [5^{bis}] sont les conditions de stabilité cherchées, lorsqu'on suppose les corps du système suffisamment résistants, pour les efforts auxquels ils sont soumis. Si une de ces inégalités devenait une équation, cela signifierait que le système serait en équilibre instable, et que le point $i\ e$ étant sur le point de s'ouvrir, la pression N agirait soit en e (si [5] devenait une équation), soit en i (si c'était [5^{bis}]). C'est ce qu'on trouverait directement en reprenant dans cette hypothèse les raisonnements précédents.

85. La recherche des pressions résultantes supportées par les points est un problème qui dans le cas de la stabilité du système, et dans l'hypothèse de la résistance illimitée des matériaux, a une infinité de solutions. Il deviendrait déterminé si l'on connaissait deux points du polygone $cC'C''C^{(n)}C$ des centres de pression, par exemple c et $C^{(n)}$. En effet on en conclurait la valeur de N par l'équation des moments (voir la figure)

$$N\ .\ \overline{cD}^{(n)} = \sum M \left\{F',\ F''\ \ldots\ F^{(n)}\right\}_{C^{(n)}} \ldots\ldots [\ 6\ ]$$

Si les deux points connus étaient $C^{(n)}$ et C, on aurait, outre l'équation précédente

$$N\ .\ \overline{cD} = \sum M \{F\}_C$$

d'où par soustraction,

$$N\ .\ \overline{DD^{(n)}} = \sum M \{F\}_C - \sum \left\{F',\ F'',\ \ldots\ F^{(n)}\right\}_{C^{(n)}}.$$

La force N étant ainsi déterminée le point C' se trouve graphiquement, ou par le calcul, sur la résultante des forces connues N et F' ; le point c'' sur la résultante des forces connues N, F', F'' et ainsi de suite jusqu'au point C.

86. C'est sur cette observation qu'est fondée la marche suivante, dont l'idée appartient à Mr. Mery (*annales des Ponts et Chaussées*, janv. 1840), pour vérifier la stabilité d'une voûte en

berceau, eu égard à la résistance limitée des matériaux. On choisit le point $A^{(n)}$ de manière qu'il soit à peu près celui qui donne la plus grande valeur au quotient

$$\frac{\sum M \left[F' , F'' \ldots F^{(n)} \right]_{A^{(n)}}}{x^{(n)}}$$

formant le 2^{d} membre de l'inégalité [5]. Ce quotient qu'on calcule approximativement donne une valeur inférieure à N, (ce que l'on voit en multipliant l'inégalité [1] par l'inégalité semblable $Z^{(n)} > \zeta^{(n)}$), mais qui généralement en diffère peu. En la substituant dans la formule finale du n° 82 à la place de P, et en y mettant aussi pour p' le maximum de pression par mètre carré auquel on peut soumettre les matériaux considérés, on trouve la valeur

$$a = \frac{2}{3} \frac{N}{bp'}$$

de la moindre grandeur qu'on puisse donner à la distance $e\ c$.

87. D'une autre part, en transportant parallèlement à elles-mêmes en un même point d'application les forces $N, F', F''. \ldots . F^{(n)}$ et calculant leur résultante on aura de même une approximation de la pression totale sur le joint $A^{(n)}\ B^{(n)}$; d'où l'on conclura la moindre grandeur que puisse avoir la distance $A'^{n)}\ C^{(n)}$.

88. Prenant alors les points C et $C^{(n)}$ de manière à satisfaire à ces deux conditions : on calculera avec plus de précision la force N par la formule [6] du n° 85, et si elle diffère sensiblement de la première calculée on modifiera en conséquence les points C et $C^{(n)}$. Cela fait on déterminera (85) d'autres points du polygone des centres de pression, notamment le point C, qui eut égard à la pression totale sur le joint $I\ E,$ qu'on aura calculé de la même manière que celle du joint $A\ B^{(n)}$, (87), devra être éloigné des arrêtes $F_1,\ I$, au moins à une distance qu'on pourra également calculer.

Si cette condition est satisfaite il faudra s'assurer qu'elle l'est également pour tous les autres joints.

Chap. 3. *De la résistance des matériaux employés dans les constructions.*

§:1 Prismes tirés ou comprimés parallèlement à leur longueur.

89. Un prisme sollicité à ses extrémités par des forces parallèles à sa longueur et uniformément réparties sur chaque base s'allonge ou se raccourcit d'une quantité qui, lorsque le repos est rétabli, suit une loi fort simple, tant que les intensités des forces ne sont pas trop considérables. Si l'on appelle

L la longueur primitive du prisme

x son allongement

i le rapport $\frac{x}{L}$, c'est-à-dire l'allongement ou le raccourcissement par unité de longueur

F la force totale exercée sur l'une des bases du prisme

Ω la surface de cette base ou l'aire de la section droite du prisme

R le rapport $\frac{F}{\Omega}$ c'est-à-dire la force (tension ou pression) exercée sur l'unité de surface de la section droite du prisme ;

les deux quantités R et I sont directement proportionnelles et l'on a par conséquent

$$R = Ei \quad \text{ou} \quad F = E\frac{\Omega}{L}x \qquad [1]$$

E étant une constante tant que la nature du corps ne change pas et que la force R n'excède pas une certaine valeur qu'on appelle *la limite de l'élasticité.*

Par exemple, s'il s'agit de fer forgé, en prenant le mètre et le kilogramme pour unité, on a environ

$$E = 2\times 10^{10}$$

d'où l'on conclura que si la tension est de 10 Kilog. par millimètre carré, ou $R = 10\times 10^{6}$, l'allongement par mètre i est de $\frac{1}{2\,000}$ ou $\frac{1}{2}$ millimètre.

Pour ce fer la limite d'élasticité répond à une tension qui varie de 12 à 15 Kilog. par millimètre carré, suivant la qualité du fer ; ainsi la plus grande valeur de R compatible avec la loi ci-dessus est de 12×10^6 à 15×10^6, et la valeur correspondante de i est de 0,0006 à 0,00075.

90. Ces résultats d'expérience peuvent être vérifiés en suspendant à l'extrémité inférieure d'une tige prismatique verticale, fixée à l'autre bout, un corps d'un poids connu. Pour montrer combien il importe de ne point laisser prendre à ce corps une vitesse sensible quand il s'agit de mesurer la limite d'élasticité, nous traiterons le problème suivant que nous empruntons à *l'introduction à la mécanique industrielle* de Mr. Poncelet pages 385 et suivantes.

Une tige prismatique verticale est fixée à son extrémité supérieure. Un corps M dont le poids est Q, étant traversé par cette tige, glisse sans frottement parallèlement à sa longueur, et a ainsi acquis une vitesse V_0 à l'instant où, retenu par un arrêt au bout inférieur de la tige, il ne peut plus descendre sans recevoir de la part de cette tige une force opposée à celle de la

gravité. Cela posé, on demande à partir de cet instant la loi du mouvement du corps M considéré comme condensé à son centre de gravité, en négligeant la masse de la tige et en admettant en conséquence qu'à mesure qu'elle s'allonge sa tension augmente uniformément dans toute sa longueur et suit la même loi que si sous cette tension, elle était au repos.

Appelons à un instant quelconque, en conservant les notations précédentes,

x la longueur parcourue par le corps M et par l'extrémité inférieure de la tige, depuis l'instant de leur liaison,

v la vitesse acquise par le corps M.

La force variable F que la tige exerce sur ce corps a pour expression

$$E \frac{\Omega}{L} x$$

d'après le n° précédent, et l'hypothèse qui vient d'être énoncée. Ainsi le travail des forces Q et F appliquées au corps M pendant le parcours de x est

$$\int_0^x (Q - F)\, dx \quad \text{ou} \quad \int_0^x \left(Q dx - \frac{E\,\Omega}{L}\, x dx \right).$$

La puissance vive acquise par le corps M en vertu de ce travail est

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(v^2 - v_0^2 \right)$$

on a donc (89)

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{g} \left(v^2 - v_0^2 \right) = Q x - \frac{E\,\Omega}{2\,L} x^2 \ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Pour simplifier désignons par l l'allongement de la tige à l'instant où sa tension est Q ; c'est celui qu'elle prendrait et conserverait si le corps M y était suspendu en repos. Pour le déterminer il faut dans l'équation [1] faire $F = Q$, et $x = l$ d'où $\frac{E\,\Omega}{L} = \frac{Q}{l}$

Substituant dans l'équation [2] on a

$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{l} (2\,l - x)\, x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

Le maximum de vitesse répond à $x = l$ et à $F = Q$, ce qu'on aurait pu voir <u>à priori</u>, le maximum est donné par la formule

$$V^2 = V_0^2 + gl$$

Tant que V est positive la tige s'allonge : le maximum d'allongement X répond à $v = 0$ et est donné par

$$X^2 - 2\,lX = \frac{l\,v_0^2}{g} \quad \text{ou} \quad X = l + \sqrt{l^2 + \frac{l\,v_0^2}{g}}$$

la tension correspondante d'après [1], est à Q dans le rapport de X à l ; elle est donc

$$\frac{Q\,X}{l} \quad \text{ou} \quad Q \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{gl}} \right)$$

Ainsi, par exemple, dans le cas particulier ou v_0 est nulle, c'est-à-dire quand le poids Q d'abord attaché à la tige sans tension est tout à coup abandonné sans vitesse verticale à l'action de la pesanteur, la tige prend, à l'instant ou le corps s'arrête, un allongement double et une tension double des valeurs qui correspondraient à l'état de repos. Lorsque v_0 n'est pas nulle le maximum de tension dépend du rapport de la hauteur $\frac{v_0^2}{2g}$ à $\frac{1}{2}l$ et cette dernière quantité est, toutes choses étant égales d'ailleurs, proportionnelle à L.

91. A partir de l'instant du maximum d'allongement, le corps M remonte en reprenant les mêmes valeurs de x ; les mêmes vitesses mais en sens contraire. Il possède donc une vitesse ascendante égale à v_0 à l'instant où la tige est revenue à son état naturel dans cette position si le corps peut glisser le long de la tige sans frottement il s'élèvera à la hauteur $\frac{v_0^2}{2g}$ due à v_0 puis il retombera. Si au contraire il est fixé à l'extrémité de la tige et que celle-ci ne puisse fléchir, elle se contractera en exerçant sur le corps M une pression de haut en bas dont l'intensité sera donnée par la formule

$$F = \frac{E\,\Omega\,x'}{L},$$

dans laquelle x' est la diminution de longueur de la tige. L'action de celle-ci est donc alors, dans toutes les positions possibles, donnée, pour l'intensité et le sens, par la formule

$$F = \frac{E\,\Omega\,x}{L}$$

précédemment introduite dans le calcul, en changeant le signe de x quand le corps M est au dessus de la position initiale. Dans ce cas la formule [3] s'applique à toutes les valeurs de x positives ou négatives ; elle donne en y faisant $v = 0$, les valeurs extrêmes de x, savoir :

$$l \pm \sqrt{l^2 + \frac{l\,v_0^2}{g}},$$

d'où il suit que l'amplitude des oscillations est

$$x\sqrt{l^2 + \frac{l\,v_0^2}{g}}.$$

Soit A (fig. 16) l'origine de x ;

$$AO = L \;;\; OB = OB' = \sqrt{l^2 + \frac{l\,v_0^2}{g}} = p$$

AM étant une valeur de x, représentons par z la variable OM, et transformons l'équation [3] en y remplaçant x par sa valeur en z. On trouvera

$$x = l + z \;;\quad 2l - x = l - z$$

d'où $$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{l}\left(l^2 - z^2\right) \qquad \text{ou} \quad v^2 = \frac{g}{l}\left(p^2 - z^2\right)$$

la vitesse v est donc représentée par l'ordonnée MN ou y du cercle construit sur BB' comme diamètre, multiplié par le coefficient $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Si l'on cherche la durée des oscillations, il faut dans la dernière équation faire $v = \frac{dz}{dt}$, et en tirer

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{dz}{\sqrt{p^m - z^2}}$$

d'où en intégrant

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\, arc\,(\sin = \frac{z}{p}) + c$$

et en prenant cette intégrale depuis $z = -p$ jusqu'à $z = p$ on trouve la durée d'une oscillation simple, aller ou retour,

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

quantité indépendante de la vitesse v_0.

M. Poncelet fait cette intégration par un procédé géométrique élémentaire. Soit *MM′*, un espace infiniment petit *dz* parcouru pendant le temps *dt*, en désignant l'ordonnée *MN* par y on a

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} . \frac{dz}{y}$$

Menant *M′N′* parallèle à *MN*, et *N′P* parallèle à *MM′*, et désignant par *ds* l'arc infiniment [petit] *NN′*, on a par la similitude des triangles *OMN, NN′P*

$$\frac{dz}{y} = \frac{ds}{p} \qquad \text{et par suite} \qquad dt = \sqrt{\frac{l}{g}} . \frac{ds}{p}$$

donc le temps employé à parcourir *MM′* est exprimé par *ds* ou *NN′* multiplié par $\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{.1}{p}$;

donc le temps de parcours de *BB′* est

$$\pi\, p \times \sqrt{\frac{l}{g}} . \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Exemple. $L = 10^m$, $\frac{Q}{\Omega} = (4 \times 10^6)^{Kil.}$, $E = (2 \times 10^{10})^{Kil.}$, $v_0 = 0$

on trouve $l = \frac{QL}{E\,\Omega} = 0^m,002$;

maximum de vitesse $V = \sqrt{gl} = 0^m,142$;

durée d'une oscillation simple $T = 3,1416 \sqrt{0,00204} = 0^s,045$;

nombre de courses doubles par seconde $\frac{1}{2\,T} = 11,1$.

92. Les considérations qui précédent font comprendre qu'une charge insuffisante pour dépasser la limite d'élasticité d'une pièce peut produire cet effet si une cause accidentelle lui imprime une vitesse, et expliquent ce qu'on appelle improprement l'influence ou l'action du temps. Ainsi une tige qui ne perd son élasticité que sous une charge de 12 à 15 Kil. par millim.

carré ($R = 12 \times 10^6$ à 15×10^6) n'est-elle considérée que comme pouvant porter une charge permanente de 6 à 8 Kil. par millim. carré ($R = 6$ à 8×10^6).

§:2 Généralités sur la flexion des prismes

93. Lorsqu'un prisme est sollicité par des forces inclinées par rapport à la longueur, il se courbe et l'on admet que les éléments matériels qui se trouvaient primitivement dans une section perpendiculaire aux arêtes, restent encore après leur déplacement dans un plan normal aux courbes qui remplacent ces arêtes rectilignes.

Soit *AB* (fig. 16) un prisme fléchi par des forces extérieures, et en repos. Soient *aa′, bb′* deux sections transversales infiniment voisines, qui dans l'état naturel se trouveraient parallèles et qui dans l'état de flexion font un angle infiniment petit. Nous supposons que la partie *bb′B* du corps est sollicité par des forces extérieures *F* dont la résultante est sensiblement parallèle au plan *aa′*, situé dans un plan qui sera celui de la figure et qui, divisant le prisme en deux parties symétriques, est le plan de flexion.

Cette partie *bb′B* du prisme est sollicitée, en outre des forces *F,* par les actions moléculaires que les éléments de la section *aa′* exercent sur ceux de la section *bb′*. Nous désignerons en général ces dernières forces par *A*.

Cet ensemble de deux espèces de forces satisfait aux six conditions générales de l'équilibre. Trois de ces conditions conduisent à des conséquences importantes.

94. 1° — En prenant un axe de *x* perpendiculaire à *aa′* on a

$$\sum F_x + \sum A_x = 0 \quad \text{ou, d'après l'hypothèse, ...} \quad \sum A_x = 0$$

donc les forces A_x sont les unes positives, ou répulsives, les autres négatives ou attractives, donc il y a raccourcissement dans la fibre élémentaire *a′b′*, allongement dans *ab*, et une fibre intermédiaire *oo′* invariable.

95. 2° — On peut prendre à volonté l'axe des moments. Soit choisi celui qui se projette en *o*.

On a $$\sum M\{F\}_o = \sum M\{A\}_o$$

en prenant pour positifs les moments des forces attractives au dessus de *o*, et celui des forces répulsives au dessous du même axe.

Cette quantité $\sum M\{A\}_o$ est ce qu'on appelle <u>le moment d'élasticité</u> du prisme, dans la section *aa′*, pour l'état de flexion résultant des forces *F*.

Il résulte de l'équation des moments que lorsque les distances des forces *F* à l'axe *o* sont très grandes par rapport aux dimensions transversales du prisme (seul cas étudié ici), la somme absolue des forces A_x est très grande par rapport aux intensité des forces *F*.

96. 3° — En prenant un axe des *y* parallèle à *aa′* on a

$$\sum A_y + \sum F_y = 0$$

Cette somme $[\sum F_y]$ étant la résultante des forces *F*, il s'ensuit que la somme des forces A_y composante des parallèles au plan *aa′* des actions moléculaires de *aa′* sur *bb′* est très petite par rapport à la somme absolue des forces A_x.

C'est par cette raison qu'on peut regarder le plan bb' comme s'étant écarté de sa position primitive, relativement au plan aa', en tournant autour de o' sans glisser ; de sorte que ce point o' reste situé comme il l'était relativement au plan aa'. Il s'ensuit aussi que les forces A peuvent être considérées comme normales à aa'.

97. Soit $d\,\omega$ un élément superficiel de aa', v sa distance de l'axe o, positive ou négative suivant que $d\,\omega$ est au dessous ou au dessus de o. La force normale A qu'il exerce sur la section bb' étant proportionnelle au raccourcissement ou à l'allongement de la fibre qui a cet élément pour base, et cette variation de longueur étant elle-même proportionnelle à v, on a

$$A = \varphi\, v\, d\,\omega$$

en appelant $\varphi\, d\,\omega$ la valeur de la force qui aurait lieu à l'unité de distance où $\sum A$ étendue à toute la section aa' est nulle (94). Donc

$$\sum \varphi\, v\, d\,\omega = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum v\, d\,\omega = 0$$

donc l'axe o passe par le centre de gravité de sa section projetée en aa'.

98. Le moment d'élasticité $\sum M\,\{A\}_o$, qui varie suivant la nature de la pièce et suivant son état de flexion à l'endroit de la section aa' considérée, peut s'exprimer de diverses manières.

1ère expression Pour l'élément $d\,\omega$ la force A étant $\varphi\, v\, d\,\omega$, son moment est $\varphi\, v^2\, d\,\omega$ soit que cet élément se trouve au dessus ou au dessous de l'axe o. Donc pour toute la section on a

$$\sum M\,\{A\}_o = \varphi \sum v^2\, d\,\omega\,.$$

$\sum v^2\, d\,\omega$ est ce qu'on appelle improprement <u>le moment d'inertie de la surface</u> aa' par rapport à l'axe projeté en o. On sait que cet axe passant par le centre de gravité, la somme $\sum v^2\, d\,\omega$ est plus petite que si elle était prise par rapport à tout autre axe parallèle au premier(*). Nous désignerons pour abréger cette somme par I ; ainsi

$$\sum v^2\, d\,\omega = I$$

99. *2e expression* Soir R le quotient $\frac{A}{d\,\omega}$ c'est-à-dire <u>la résistance (tension ou pression) rapportée à l'unité de surface</u> que l'élément $d\,\omega$ placé dans la section aa' à la distance v de l'axe projeté en o, exerce sur l'élément correspondant de la section bb' pour s'opposer, soit à son rapprochement, soit à son éloignement. On a donc

$$R = \varphi\, v \qquad \text{ou} \qquad \varphi = \frac{R}{v}\,,$$

d'où moment d'élasticité

$$\sum M\,\{A\}_o = \frac{R}{v} \qquad \sum v^2\, d\,\omega = \frac{R}{v}\, I\,,$$

en observant que, sous le signe $\sum$, v a une signification générale, tandis que dans $\frac{R}{v}$, c'est une distance spéciale, et le rapport $\frac{R}{v}$ est constant pour un état de flexion donné à l'endroit de la section aa'. R et v étant ainsi proportionnelles, leur plus grandes valeurs se correspondent de

(*) Cette propriété générale des moments d'inertie est très facile à établir surtout dans le cas des surfaces planes. Soit $d\,\omega$ un élément superficiel, v sa distance à un axe passant par le centre de gravité, y sa distance à un autre axe parallèle, k la distance de ces deux axes entre eux.
On a $y^2 = (v \pm k)^2$ et $\sum y^2\, d\,\omega = \sum v^2\, d\,\omega + k^2\, d\,\omega$ à cause de l'équation $\sum v\, d\,\omega = 0$

sorte que si R' est la plus grande résistance par unité de surface dans la section aa' et v' la plus grande ordonnée des points de cette section par rapport à l'axe projeté en o, on a

$$\sum M\{A\}_o = \frac{R'}{v'} \sum v^2 \, d\omega$$

ou pour abréger $$M = \frac{R'}{v'} I$$

Enfin si l'on désigne par R_1 le maximum de résistance par unité de surface que puisse exercer la pièce sans dépasser la limite d'élasticité, on aura, relativement aux divers états de flexion de la pièce, près de la section aa',

$$\underline{\textit{limite du moment d'élasticité}} = \frac{R_1}{v'} \sum v^2 \, d\omega ,$$

ou pour abréger $$M = \frac{R_1}{v'} I$$

Il faudra néanmoins distinguer si au point dont l'ordonnée est v' l'action mutuelle des sections aa', bb', est une pression ou une tension, car la valeur de R_1 n'est pas toujours la même pour les deux cas. Par exemple pour la fonte de fer quand il s'agit d'efforts permanents, les valeurs de R_1 qu'il convient d'adopter sont 3 x 10^6 (ou 3 Kil. par millimètre carré) pour la tension, et 10 x 10^6 (10 Kil. mm^2) pour la pression.

100. *3^e^ expression* du moment d'élasticité. Soit c le point de rencontre de aa' et bb' ou le centre de courbure de la pièce en aa'. L'élément nn' dont la section est $d\omega$ et dont la distance à oo' est v, est raccourcis de $oo' - nn'$ et la force répulsive qu'il exerce en n' est (89)

$$A = E \frac{oo' - nn'}{oo'} d\omega$$

or, $oo' : nn' :: oc : oc - v$ d'où $\frac{oo' - nn'}{oo'} = \frac{v}{oc} = \frac{v}{\rho}$;

donc $$A = E \frac{v \, d\omega}{\rho}$$

donc le moment total des forces répulsives au dessous de l'axe o par rapport à ce même axe est $E \sum v^2 \, d\omega$, cette dernière somme étant prise pour l'étendue de la section en dessous de o.

De même pour l'élément mm' la force attractive qu'il exerce en m' est

$$E \frac{mm' - oo'}{oo'} d\omega$$

or $mm' : oo' :: oc + v : oc$ d'où $\frac{mm' - oo'}{oo'} = \frac{v}{\rho}$

en donnant à v sa valeur absolue. Donc la force attractive est $\underline{E \, v \, d\omega}$ et son moment est $\underline{E \, v^2 \, d\omega}$ comme pour les forces répulsives. Donc pour toutes les forces que la section aa' exerce sur la pièce considérée on a la somme de leurs moments par rapport à o ou le moment d'élasticité

$$\sum M\{A\}_o = \frac{E}{\rho}\sum v^2\, d\,\omega \qquad \text{ou} \qquad \frac{E\,I}{\rho},$$

la somme $\sum v^2\, d\,\omega$ dite moment d'inertie étant prise dans toute l'étendue de la section *aa'*.

101. *4^e^ expression* du moment d'élasticité. Dans les applications qui vont être marquées, les rayons de courbure des pièces sont toujours supposés très grands en comparaison des longueurs de ces pièces, parce qu'il importe dans les constructions que les déformations soient peu sensibles. Si donc on suppose un axe des x tangent en un des points de la ligne centrale, passant par les centres de gravité des sections transversales de la pièce, l'inclinaison de la courbe sur cet axe sera partout très petite.

En prenant un axe des y dans le plan de la courbe et perpendiculaire à celui en x, et en supposant que l'équation de la courbe soit $y = f(x)$ on sait qu'on a généralement le rayon de courbure

$$\rho = \frac{\left(1+(f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

mais attendu que dans les applications, l'inclinaison $f'(x)$ est toujours petite, on ne commettra qu'une très petite erreur et on obtiendra une grande simplification si l'on écrit

$$\rho = \frac{1}{f''(x)} \qquad \text{d'où} \qquad \sum M\{A\}_o = E\,f''(x)\sum v^2\, d\,\omega, \quad \text{ou} \qquad E\,I\,f''(x).$$

§:3 *Formules pour les moments d'inertie de diverses surfaces planes et pour les limites des moments d'élasticité correspondants.*

102. Parallélogrammes dont un côté est parallèle à l'axe du moment d'inertie (fig. 17)

$$I = \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} v^2\, b\, d\, v = \frac{1}{2}\, b\, v^3 + c = \frac{1}{12}\, b\, c^3 = \Omega\, \frac{c^2}{12}$$

en désignant par Ω l'aire du parallélogramme.

La limite du moment d'élasticité s'obtient en faisant $v' = \frac{1}{2}c$ dans la dernière formule du n° 99

$$M_1 = R_1 . \frac{bc^2}{6} = R_1\, \Omega\, \frac{c}{6}$$

103. Rectangle évidé (fig. 18 et 19)

Le moment d'inertie est dans ce cas la différence de deux autres qui se calculent par la force précédente. On a

$$I = \frac{1}{12}\left(b\,c^3 - b'\,c'^3\right) \quad \text{et} \quad M_1 = \frac{RI}{\frac{1}{2}c} = R_1\, \frac{b\,c^3 - b'\,c'^3}{6\,c}$$

Dans l'application de ces formules et de celles qui seront obtenues aux N^os^ suivants, il ne faut pas perdre de vue qu'elles sont fondées sur une hypothèse (93) qui n'est complètement

admissible que pour les prismes pleins, dont la section diffère peu d'un polygone régulier. Dans le cas des fig. 18 et 19 où la section présente deux rectangles horizontaux unis par deux rectangles verticaux, si ces derniers devenaient très minces, les deux premiers fléchiraient à peu près comme s'ils étaient indépendants et soumis, chacun, à la moitié des forces appliquées à l'ensemble.

Pour éviter cet effet on a soin de remplir les angles rentrants par des courbes de raccordement dites corrigées.

104. Parallélogramme dont la diagonale est l'axe du moment d'inertie (fig. 20)

$$I = \int_{-h}^{h} v^2 \left(b - \frac{bv}{h} \right) dv = b \left(\frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4\,h} \right) + c = \frac{1}{6}\, b\, h^3 = \Omega \frac{h^2}{6}$$

$$M_1 = \frac{R_1\, I}{h} = R_1 \frac{6\, h^2}{6} = R_1\, \Omega \frac{h}{6}$$

105. Triangle dont un sommet est sur l'axe du moment d'inertie (fig. 21)

Même formule qu'au n° précédent.

106. Triangle dont un côté est parallèle à l'axe du moment d'inertie (fig. 22)

Si l'axe du moment d'inertie passait par le sommet on aurait

$$\sum y^2\, d\,\omega = \int_{o}^{h} y^2 \,.\, \frac{by\, dy}{h} = \frac{1}{4}\, b\, h^3$$

L'axe passant par le centre de gravité on a, d'après une propriété connue des moments d'inertie (note du n° 98)

$$I = \frac{1}{4}\, b\, h^3 - \frac{b\, h}{2} \,.\, \left(\frac{2}{3}\, h \right)^2 = \frac{1}{36}\, b\, h^3 = \Omega \frac{h^2}{18}$$

Quant à M_1 il pourra y avoir une distinction à faire (99) suivant que l'allongement aura lieu à la base b ou au sommet opposé. Soit R_t la valeur de R pour la tension et R_p sa valeur pour la pression. Si l'extension a lieu à la base, M_1 sera la moindre des deux valeurs.

$$\Omega\, R_t \frac{h}{6} \;,\; \Omega\, R_p \frac{h}{12} \;;$$

dans le cas contraire ce sera la moindre des deux valeurs

$$\Omega\, R_t \frac{h}{12} \;,\; \Omega\, R_p \frac{h}{6}$$

si, par exemple, $R_p = 3\, R_t$, ce qui est à peu près le cas de la fonte de fer (99), M sera $\Omega\, R_t \,.\, \frac{h}{6}$ dans le premier cas et $\Omega\, R_t \,.\, \frac{h}{12}$ dans le 2e.

107. Rectangle dont les côtés sont b et c, et dont le côté c fait un angle α avec l'axe ou du moment d'inertie (fig. 23)

Considérons d'abord le trapèze *BCDE* moitié du rectangle. Soient *TT′* les aires des triangles *BCF, EDF*. Le moment d'inertie du trapèze est (104)

$$\frac{1}{6}\left(T\,h^2 - T'\,h'^2\right)$$

or $T:T'::h^2:h'^2$ d'où $Tb'^2 = T'b^2$;

donc $$\frac{1}{6}\left(T\,h^2 - T'\,h'^2\right) = \frac{1}{6}\left(T\,h^2 - T'\,h^2 + T\,h'^2 - T'\,h'^2\right) = \frac{1}{6}\left(T - T'\right)\left(h^2 + h'^2\right)$$

La figure fait voir qu'on a

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\,b\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha \\ h' &= \frac{1}{2}\,b\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{d'où} \qquad h^2 + h'^2 = \frac{1}{2}\left(b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha\right)$$

Ainsi le moment d'inertie du trapèze *BCDE* par rapport à l'axe *oo* est

$$\frac{1}{12}\left(T - T'\right)\left(b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha\right)$$

dont celui du rectangle, qui est double, est, en désignant par Ω l'aire du rectangle, double de *T* - *T'* ;

$$I = \frac{\Omega}{12}\left(b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{12}\,b\,c\left(b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha\right)$$

$$M_1 = \frac{R_1\,I}{h} = \Omega\,R_1\,\frac{b^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha}{6\left(\cos\alpha + \sin\alpha\right)}$$

Ces formules coïncident avec celles du n° 102 quand on fait $\alpha = 90°$

108. Quand le rectangle précédent devient carré, on a $b = c$ et

$$I = \frac{1}{12}\,A\,b^2$$

indépendant de α. Mais il n'en est pas de même de M_1 dont le maximum répondant à $h = \frac{1}{2}\,b$ ou $\alpha = 0$ est $\frac{1}{6}\,\Omega\,R_1\,b$ et le minimum répondant à $h = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ou $\alpha = 45°$, est $\frac{1}{6\sqrt{2}}\,\Omega\,R_1\,b$.

109. Tuyau cylindrique. (fig. 24)

Supposons-le d'abord très mince : nous aurons

$$\sum v^2\,d\,\omega = \sum u^2\,d\,\omega \qquad \text{d'où} \qquad \sum v^2\,d\,\omega = \frac{1}{2}\sum\left(v^2 + u^2\right)d\,\omega$$

donc $$I = \sum v^2\,d\,\omega = \frac{I^2\,\Omega}{2} \qquad \text{ou} \qquad \pi\,r^3\,\epsilon$$

et $$M = \frac{R_1\,I}{r} = \frac{1}{2}\,R_1\,\Omega\,r \qquad \text{ou} \qquad R_1\,\pi\,r^2\,\epsilon \ (*)$$

en appelant r le rayon et ϵ la petite épaisseur du tuyau, sauf l'observation du n° 103.

(*) Formulation peut claire pour "*ou* $\pi\,r^3\,\epsilon$ " et "*ou* $R_1\,\pi\,r^2\,\epsilon$ ", si on ne se replace pas dans le contexte d'un cours *oral*, permettant l'élision, respectivement de *I*= et *M*=

Si l'épaisseur n'est pas très petite par rapport au rayon, soient r' et r'' les rayons des circonférences intérieures et extérieures ; on a

$$I = \int_{r'}^{r''} \pi r^3 \, d\, r = \frac{1}{4} \pi \left(r''^4 - r'^4 \right) = \frac{\Omega}{4} \left(r''^2 + r'^2 \right)$$

et

$$M = \frac{R_1 I}{r''} = \frac{1}{4} R_1 \Omega \, \frac{r''^2 + r'^2}{r''}$$

110. Cylindre de révolution plein. En faisant $r = 0$, et $r'' = r$ on a

$$I = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{\Omega}{4} r^2 \qquad \text{et} \qquad M' = \frac{1}{4} R_1 \Omega r$$

111. Ellipse pleine dont un des diamètres principaux est l'axe du moment d'inertie (fig. 25)

Soit $AB = 2a$, et $CD = 2b$. En comparant l'ellipse à un cercle dont le diamètre serait $2b$, on voit que les deux surfaces peuvent être décomposées en un même nombre de petits rectangles de même hauteurs, deux à deux, et dont les bases sont dans le rapport de a à b. Donc (102) il en est de même des moments d'inertie. On a ainsi (110)

$$I = \frac{1}{4} \pi b^4 . \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \pi ab^3 \qquad \text{ou} \qquad I = \Omega \frac{b^2}{4}$$

et

$$M_1 = R_1 \Omega \frac{b}{4}$$

Si l'axe des moments était un diamètre quelconque, en l'appelant $2a'$, désignant par $2b'$ son conjugué et par α leur angle, il suffirait dans les formules précédentes de remplacer a par a' et b par $b' \sin \alpha$.

112. Surface plane quelconque (fig. 26). Soit une surface $KLNM$ terminée par deux droites KL, MN, parallèles à l'axe oo du moment d'inertie, et par deux courbes KM, LN. Soit désigné par u la longueur d'une corde PQ parallèle à oo, et par v sa distance à cet axe.

On a pour cette surface le moment d'inertie

$$I = \int_{K}^{K+l} v^{2.} \, u dv$$

Pour avoir la valeur approximative de cette intégrale, on divise la distance de KL à MN en un nombre pair n de parties égales, ou menant par les points de division des parallèles à l'axe qui en y comprenant KL et MN seront désignés par $u_0, u_1, u_2, \ldots . u_n$, on désigne par δ la distance $\frac{l}{n}$ de deux parallèles consécutives, et l'on pose d'après la formule de Th. Simpson

$$I = \frac{\delta}{3} \left(K^2 u_0 + 4 (K + \delta)^2 u_1 + 2 (K + 2\delta)^2 u_2 + 4 (K + 3\delta)^2 u_3 + ... + 4 (K + l - \delta)^2 u_{n-1} + (K + l)^2 u_n \right)$$

Quand les courbes KM, LN sont peu accidentée il suffit de faire $n = 4$. Les parallèles u_0, u_n peuvent être nulles.

§: 4 *Prismes soumis transversalement à une charge uniformément répartie et à des forces discontinues dans un même plan.*

1° Généralités sur ce sujet

113. Soit *OB* (fig. 27) une portion de prisme, dont les arêtes longitudinales font, à l'extrémité *O* un très petit angle *COD* ou α avec l'horizontale *OC*.

La longueur du prisme est désignée par *a*. Sa charge uniformément répartie est *pa*. De plus ce corps est soumis aux forces verticales *P′, P″, ..., P*$^{(n)}$ dont les distances à l'origine *o* sont *x′,x″ ,. . . ., x*$^{(n)}$.

Vu la faible courbure de la pièce ces distances sont indifféremment *OM′, OM″, ..., OM*$^{(n)}$, comptées sur la pièce ou *ON′, ON″, ..., ON*$^{(n)}$ comptées sur l'horizontale O_x .

Soit un point quelconque *M* sur la fibre moyenne de la pièce, entre *O* et *M′,* et soient *x* et *y* ses coordonnées rectangulaires. Appliquons au solide compris entre le plan *aMa′* et l'extrémité *B* les considérations générales du §: 2 N^{os} 93 et suivants nous aurons (95)

$$[\,1\,]\ldots.\ \sum M\{A\}_M = \frac{1}{2}\,p\,(a-x)^2 + P'(x'-x) + P''(x''-x) + \ldots\ P^{(n)}\left(x^{(n)}-x\right)$$

En mettant pour $\sum M\{A\}_M$ soit sa deuxième expression (99), soit la 3^{e} (100) on a deux équations

$$\left.\begin{array}{l} [\,2\,]\ldots\ldots\ldots \dfrac{R}{V'}\,I \\ \\ [\,3\,]\ldots\ldots\ldots \dfrac{E}{\rho} \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\,p\,(a-x)^2 + P'(x'x) + P''(x''-x) + \ldots\ P^{(n)}\left(x^{(n)}-x\right)$$

Dans ces équations *v′* et *I* sont des constantes qui dépendent de la section du prisme, *E* est une constante dépendant de la substance du prisme, *R′* maximum de la résistance par unité de surface dans la section *aa′*, et ρ, rayon de courbure en *M,* sont des variables dépendantes de *x*, seule variable du second membre.

Pour tout point situé entre *M′* et *M″* on aura deux équations qui ne différeront des deux précédentes qu'en ce que *P′* disparaîtra. Ainsi de suite jusqu'à l'extrémité *B* de la pièce.

114. Si les forces *P′, P″ . . . ., P*$^{(n)}$ sont positives, c'est-à-dire si elles ont la direction indiquée dans la figure le 2^{d} membre commun aux deux équations ci-dessus décroît avec *x* : la plus grande valeur de *T′* et la plus grande flexion (ou le plus petit rayon de courbure) ont lieu à l'origine *o*.

Il pourra n'en être plus de même quand les forces *P* seront toutes ou partiellement négatives, et la discussion des valeurs du second membre fera connaître les points de plus grande tension ou de plus grande flexion, et les points d'inflexion (c'est-à-dire de non flexion) où la tension est nulle comme à l'extrémité *B*.

Si la somme algébrique des forces P', P'', ..., $P^{(n)}$ était nulle, elles équivaudraient à un couple dont le moment par rapport à M serait constant ; et si en même temps pa était nul, ρ serait constant entre O et M', c'est-à-dire que la courbe OM' serait un cercle.

115. Si sous l'équation [1] nous mettons pour $\sum M\{A\}_M$ sa quatrième expression (101), nous avons

$$[\,4\,] \ldots\ldots\ldots\ EI\int''(x)=\frac{1}{2}\,p\,(a-x)^2+P'(x'-x)+P''(x''-x)+\ldots.+P^{(n)}(x^{(n)}-x)$$

équation qui n'a lieu qu'entre O et M'. En multipliant par dx et intégrant on a, pour un point quelconque compris entre O et M',

$$[\,5\,] \ldots\ EI\left(f'(x)-tang\,\alpha\right)=\frac{1}{2}\,p\left(a^2x-ax^2+\frac{x^3}{3}\right)+P'\left(x'x-\frac{x^2}{2}\right)+P''\left(x''-x\right)+\ldots.+P^{(n)}\left(x^{(n)}-x\right)$$

En multipliant encore par dx et intégrant, on a, toujours pour un point entre O et M', l'origine des coordonnées étant en O,

$$[\,6\,]\quad EI\,(x-y\,tang\,\alpha)=\frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2x^2}{2}-\frac{ax^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right)+P'\left(\frac{x'x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+P''\left(\frac{x''x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+P^{(n)}\left(\frac{x^{(n)}x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

Ainsi les quantités α, P', x', P'', x'', ...,$P^{(n)}$, $x^{(n)}$ étant supposées données on trouverait l'inclinaison $f'(x)$ et l'ordonnée en un point quelconque de la courbe OM', dont on se donnerait l'abscisse x.

Maintenant entre M' et M'', on a une équation pareille à la formule [4] sauf la disparition de P', savoir

$$[\,7\,] \ldots\ldots\ldots\quad EI\,f''_1(x)=\frac{1}{2}\,P\,(a-x)^2+P''(x''-x)+\ldots\ldots\ldots+P^{(n)}(x^{(n)}-x)\ ;$$

dont l'intégrale, analogue à la formule [5] sauf la constante, est

$$EI\,f'_1(x)-C=\frac{1}{2}\,p\left(a^2x-ax^2+\frac{x^3}{3}\right)+P''\left(x''-x-\frac{x^2}{2}\right)+\ldots\ldots+P^{(n)}\left(x^{(n)}x-\frac{x^2}{2}\right)$$

Si dans cette équation et dans [5] on fait $x = x'$ les inclinaisons $f'(x)$ et $f'_1(x)$ appartenant toutes deux au point M' deviennent égales, et l'on a par soustraction

$$C-EI\,tang\,\alpha=P'.\frac{x'^2}{2}\ ;$$

l'équation précédente devient donc

$$[\,8\,]\ EI\left(f'_1x-tang\,\alpha\right)=\frac{1}{2}\,p\left(a^2x-ax^2+\frac{x^3}{3}\right)+P'\frac{x'^2}{2}+P''\left(x''x-\frac{x^2}{2}\right)+\ldots\ldots+P^{(n)}\left(\frac{x^{(n)}x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

son intégrale est, pour un point quelconque depuis M' jusqu'à M''

$$EI\,(y-x\,tang\,\alpha)-C'=\frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2x^2}{2}-\frac{ax^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right)+P'\frac{x'^2x}{2}+P''\left(\frac{x''x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\ldots+P^{(n)}\left(\frac{x^{(n)}x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right).$$

Si dans cette équation et dans [6] ont fait x et y égales aux coordonnées x' et y' du point M', ces deux équations sont satisfaites et la soustraction donne la constante

$$C' = -P' \frac{x'^3}{6} \ ;$$

l'équation de la courbe entre M' et M'' est donc

[9] $$EI\,(y - x\,tang\,\alpha) = \frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) - P'\frac{x'^3}{6} + P'\frac{x'^3 x}{2} + P''\left(\frac{x''x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \ldots + P^{(n)}\left(\frac{x^{(n)}x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

En procédant ainsi de suite on obtiendra l'inclinaison de la courbe et l'ordonnée à l'extrémité B.

Nous allons appliquer ces résultats généraux à quelques cas particuliers.

2° Portions de prisme horizontal à une extrémité soumise à une force verticale à l'autre extrémité et chargée en outre uniformément sur sa longueur.

Il faut dans les formules précédentes faire

$\alpha = 0$, $x' = a$, $P' = P$ force extrême positive ou négative

$P' = P'' = \ldots = 0$. p reste la charge uniforme par unité de longueur ; et les formules deviennent comme on pourrait d'ailleurs les obtenir directement

$$\left.\begin{array}{ll} [\,1,\,2°\,] & \sum M\,\{A\}_M \ldots\ldots \\ [\,2,\,2°\,] & = \dfrac{R'I}{v'} \ldots\ldots\ldots \\ [\,3,\,2°\,] & = \dfrac{EI}{\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\,4,\,2°\,] & = EI\,f''(x)\ldots \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\,p\,(\alpha - x)^2 + P\,(a - x)$$

[5, 2°] $$EI\,f'(x) = \frac{1}{2}\,p\left(\alpha^2 x - ax^3 + \frac{x^3}{3}\right) + P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$$

[6, 2°] $$EI\,y = \frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

117. Si P est positif, la plus grande valeur du 2^{d} membre des premières équations répond à $x = 0$; ainsi en appelant R, la plus grande résistance par unité de surface de la substance du prisme (99), il faut que les forces pa, et P, l'une répartis, l'autre appliquée en B, satisfassent à l'équation

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{1}{2}\,pa\,.\,a + Pa$$

ce qui prouve que quant à l'état de tension et de flexion de la pièce en O, et par conséquent quant au danger d'atteindre et de dépasser la limite d'élasticité, la charge répartie pa produit le même effet que si elle était appliquée au milieu de la pièce, ou que si une force moitié $\frac{pa}{2}$ était appliquée à l'extrémité B.

118. Si P est négatif, l'équation [2] devient en ne désignant par la lettre P que la valeur absolue de la force extrême,

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{1}{2}\, p\,(a-x)^2 - P\,(a-x)$$

ou
$$\frac{RI}{v'} = \frac{1}{2}\, p\left(a-x-\frac{P}{p}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{P^2}{p}$$

Le second membre peut être représenté par l'ordonnée d'une parabole, dont le minimum algébrique est $\frac{1}{2}\frac{P^2}{p}$, répondant à $x = a - \frac{P}{p}$.

Au point qui a cette abscisse le 2[d] membre est négatif c'est-à-dire que la courbe est concave en dessus. Il en est de même à tous les points situés entre l'extrémité B où $x = a$ rend le second membre nul et l'autre point où ce 2[d] membre devient encore nul ce qui correspond à $x = a - \frac{2P}{p}$. A partir de ce point, lorsque cette dernière quantité est positive, c'est-à-dire lorsqu'on a $pa > 2P$, à mesure qu'on rétrograde vers l'origine o des x, le second membre, devenu positif augmente et prend pour $x = 0$ la valeur $\frac{1}{2}\, pa^2 - Pa$

Ainsi pour déterminer le point de plus grande courbure ou de plus grande tension, il faut distinguer plusieurs cas

1° Si l'on a $a < \frac{P}{p}$ ou $pa < P$, la courbure est parfois négative, et son maximum de valeur absolue du moment d'élasticité, répondant à $x = 0$, est $Pa - \frac{1}{2}\, pa^2$

2° Si l'on a $a > \frac{P}{p}$ mais $a < \frac{2P}{p}$, la courbure est aussi partout négative mais le maximum de valeur absolue du moment d'élasticité, répondant à $x = a - \frac{P}{p'}$ est $\frac{1}{2}\frac{P}{p}$.

3° Si l'on a $a > \frac{2P}{p}$ la courbure est nulle au point dont l'abscisse est $x = a - \frac{2P}{p}$, et le maximum de la valeur absolue du moment d'élasticité est la plus grande des deux quantités

$$\frac{1}{2}\frac{P^2}{p} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\, pa^2 - Pa$$

Le maximum du moment d'élasticité étant ainsi déterminé on pourra s'assurer s'il ne dépasse pas la valeur de $\frac{R_1 I}{v'}$ . . . . . (99)

119. En faisant $x = a$ dans l'équation [6] du n° 116, on aura pour la valeur de y la hauteur h du point extrême B au dessous de l'horizontale 0_x, savoir

$$h = \frac{1}{E\,I}\left(\frac{pa^4}{8} + \frac{Pa^3}{3}\right).$$

Ainsi la partie de h due à la charge p uniformément répartie n'est que les $\frac{3}{8}$ de ce qu'elle serait si cette même charge était réunie à l'extrémité B.

3° Prisme posé sur deux appuis de niveau, et soumis à une force verticale P en un point C, outre une charge pa uniformément répartie sur sa longueur a - figure 28

120. Les réactions exercées par les appuis A, B peuvent être supposées verticales. Leurs valeurs sont

$$\text{en } A \ldots \frac{1}{2} pa + P\frac{d'}{a}, \text{ en } B \ldots \frac{1}{2} pa + P\frac{d}{a}.$$

Pour un point situé entre A et C, en appelant x sa distance à l'extrémité A, on a le moment d'élasticité variable égal au moment par rapport à ce point des forces agissant entre ce même point et A :

$$[1] \ldots \frac{R'I}{V'} = \left(\frac{1}{2} pa + \frac{Pd'}{a}\right) x - \frac{1}{2} px^2 = \frac{1}{2} px \left(a + \frac{2\,Pd'}{pa} - x\right)$$

Cette quantité est proportionnelle au carré de l'ordonnée répondant à l'abscisse x dans un cercle dont le diamètre égal à $a + \frac{2\,Pd'}{pa}$ aurait son origine en A. Donc si d est $< \frac{1}{2} a$, la plus grande valeur de R' sur la courbe AC a lieu au point C. Si au contraire d est $> \frac{1}{2} a$, le maximum de R' répond à celui de l'ordonnée du cercle dont le diamètre AD (fig. 29) s'obtient en portant à droite de l'extrémité B la longueur $\frac{2\,Pd'}{pa}$. Le maximum répondant au point O milieu de AD, on voit que si ce milieu est entre A et C c'est là qu'est la plus grande tension R' ; dans le cas contraire elle est en C.

Il suffit donc de vérifier si $\frac{1}{2} AD$ est plus petit ou plus grand que AC, c'est-à-dire si $\frac{1}{2} a + \frac{Pd'}{pa}$ est < ou > d.

Dans le premier cas on a le maximum de $\frac{R'I}{v'}$ en faisant dans l'équation [1],

$$x = \frac{1}{2} \quad AD = \frac{1}{2} a + \frac{Pd'}{pa} \text{ ce qui donne}$$

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{1}{2} p \left(\frac{1}{2} a + \frac{Pd'}{pa}\right)^2$$

Dans le second cas le maximum de $\frac{R'I}{v'}$ s'obtient en faisant $x = d'$ dans l'équation [1] et l'on a

$$\frac{R'I}{v'} = \left(P + \frac{1}{2} pa\right) \frac{dd'}{a}$$

comme si la charge uniformément répartie pa était remplacée par une force unique $\frac{1}{2} pa$ réunie à la force P appliquée en C.

Au moyen de ces formules, connaissant a, d, pa, I et V' on pourra en mettant pour R' la valeur R, qu'on ne doit pas dépasser on déterminera la plus grande valeur qu'on puisse donner à P.

121. Lorsque C est au milieu de AB on a $d = d' = \frac{1}{2} a$, on est dans le second cas et la formule ci-dessus devient

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{a}{4}\left(P = \frac{1}{2}\,pa\right)$$

Donc quand à la tension ou pression R' et à la courbure en C la charge répartie équivaut à une force $\frac{1}{2}\,pa$ appliquée en C.

122. Dans le cas particulier où pa est nul ou peut être négligé auprès de P, l'équation [1] du n° 120 se réduisant à

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{P\,d'}{a}\,x$$

qu'il serait facile de poser <u>à priori</u> prouve que la résistance R' nulle à chaque extrémité de la pièce croît jusqu'en C point d'application de la force P. Son maximum, ayant lieu par conséquent en C, satisfait à l'équation

$$\frac{R'I}{v'} = \frac{P\,d'\,d}{a}$$

et la plus grande valeur de P, pour ne pas dépasser la résistance R_1, est

$$P = \frac{a}{dd'}\,\frac{v'}{R_1 I}$$

123. Le cas particulier où P est nul est également compris dans les formules précédentes.

124. Dans l'hypothèse générale du n° 120 on pourrait se proposer de déterminer la courbe de la fibre moyenne de la pièce. On procéderait suivant la marche indiquée au n° 115 : en supposant connue l'inclinaison $tang\ \alpha$ de cette courbe au point A, on déterminerait l'ordonnée et l'inclinaison de la courbe en C en fonction de $tang\ \alpha$, puis l'ordonnée du point B, et en égalant cette dernière à zéro on aurait une équation pour déterminer, $tang\ \alpha$ et par suite l'ordonnée pour une abscisse quelconque de la courbe.

125. Dans le cas particulier où C est le milieu de AB, la courbe est horizontale en ce point, et l'on obtient la flèche en mettant dans l'expression de h du n° 119 $\frac{1}{2}\,a$ au lieu de a et $\frac{1}{2}(P + pa)$ au lieu de P, puis en changeant le signe du résultat. On a ainsi

$$f = \frac{1}{48}\,\frac{a^3}{EI}\left(P + \frac{5}{8}\,pa\right)$$

donc quant à la production de la flèche la charge pa uniformément répartie équivaut à une force $\frac{5}{8}\,pa$ appliquée au milieu C.

4° Prisme posé sur deux appuis AB, de niveau, et soumis à des forces verticales discontinues P', P'', P''' .....

126. Soient (fig. 30) $AB = a$, $AC' = x'$, $AC'' = x''$ . . . . . Les réactions Q', Q des appuis étant sensiblement verticales sont déterminées par deux des trois équations

$$Q\,a = P'\,x' + P''\,x'' + P'''\,x''' + \ldots\ldots$$
$$Q'\,a = P'\,(a - x') + P''\,(a - x'') + P'''\,(a - x''') + \ldots.$$
$$Q + Q' = P' + P'' + P''' + \ldots\ldots$$

Cela posé on peut appliquer ce qui a été dit aux N^{os} 113, 114 et 115, avec cette différence que les équations seront plus simples, parce qu'il n'y a plus de force *pa* répartie d'une manière continue.

En désignant toujours par R' et ρ deux variables qui sont la résistance extrême et le rayon de courbure dans la section déterminée par l'abscisse x.

On a pour un point quelconque

sur la courbe AC, $\dfrac{R'\,I}{v'} = \dfrac{EI}{\rho} = -\,Q'\,x$

sur la courbe $C'C''$, $\dfrac{R'\,I}{v'} = \dfrac{EI}{\rho} = -\,Q'\,x + P'\,(x - x')$

sur la courbe $C^{(n-1)}C^{(n)}$, $\dfrac{R'\,I}{v'} = \dfrac{EI}{\rho} = -\,Q\,(a - x) + P^{(n)}\,(x^{(n)} - x)$

sur la courbe $C^{(n)}B$, $\dfrac{R'\,I}{v'} = \dfrac{EI}{\rho} = -\,Q\,(a - x)$

On remarquera

1° que dans le calcul de la somme de moments qui fournit le 2^{d} membre d'une de ces équations il est indifférent de prendre les forces situées à droite ou celles qui sont à gauche de la portion considérée.

2° que lorsque le 2^{d} membre est négatif, (ce qui dépend des valeurs et des signes des forces P, et ce qui est toujours quand ces forces sont positives) la courbe est concave vers le sens négatif de ces forces.

3° que les deux courbes qui aboutissent en un point C d'application quelconque ont en ce point non seulement la même tangente mais la même courbure.

4° que le second membre de chaque équation étant du 1er degré en x, sa plus grande valeur dans l'étendue de la partie de courbe à laquelle il appartient, a lieu à l'un des points extrêmes de cette partie ; d'où il suit que si l'on fait $x = x'$ dans la 1ère équation, $x = x''$ dans la 3^{e}, la plus grande des valeurs obtenues au 2^{ds} membres étant égales à $\frac{EI}{\rho}$ et à $\frac{R'\,I}{v'}$ donnera la plus grande courbure $\frac{1}{\rho}$ et la plus grande résistance R' dans l'étendue de la pièce.

127. La marche indiquée aux N^{os} 124 et 125 conduirait à la détermination de la figure de la pièce dans toute son étendue.

5° Prisme maintenu horizontal en un point donné A, posé à une extrémité B sur un appui, soumis dans l'intervalle à une charge pa uniformément répartie sur la longueur AB ou a, et à une force distincte P appliquée au point C. (fig. 31)

128. Soit $AC = x'$ et soit h la hauteur du point B au dessous de l'horizontale A_x. x' et h sont donnés ainsi que a, p et P.

Soit Q la réaction sensiblement verticale de l'appui B sur la pièce.

La méthode pour déterminer cette force inconnue est fondée sur cette remarque : que si elle était donnée, on déterminerait par l'analyse du n° 115 l'ordonnée h du point B. On obtiendrait directement les six équations suivantes qui se déduisent de celles du n° 115 en y faisant $a = 0$, en remplaçant P' par P, P'' par $-Q$, x'' par a, et en supprimant les termes relatifs aux forces $P''' \ldots . P^{(n)}$. On a ainsi, entre A et C,

$$[\,1\,] \ldots . \quad EI\, f''(x) = \frac{1}{2}\, p\,(a-x)^2 + P\,(x'-x) - Q\,(a-x)$$

$$[\,2\,] \ldots . \quad EI\, f'(x) = \frac{1}{2}\, p\left(a^2 x - a\,x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P\left(x'\,x - \frac{x^2}{2}\right) - Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$[\,3\,] \ldots . \quad EI\, y = \frac{1}{2}\, p\left(\frac{a^2\,x^2}{2} - \frac{a\,x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P\left(\frac{x'\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - Q\left(\frac{a\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

et entre C et B

$$[\,4\,] \ldots . \quad EI\, f''_1(x) = \frac{1}{2}\, p\,(a-x)^2 - Q\,(a-x)$$

$$[\,5\,] \ldots . \quad EI\, f'_1(x) = \frac{1}{2}\, p\left(a^2 x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P\left(\frac{x'^2}{2}\right) - Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$[\,6\,] \ldots . \quad EI\, y = \frac{1}{2}\, p\left(\frac{a^2\,x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) - P\,\frac{x'^3}{6} + P\,\frac{x'^2\,x}{2} - Q\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Maintenant la valeur de Q doit être telle que cette équation soit satisfaite par $x = a$ et $y = h$. On a donc

$$EI\, h = \frac{1}{2}\, pa^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) + \frac{Px'^2}{2}\left(a - \frac{x'}{3}\right) - Q\,\frac{a^3}{3}$$

d'où
$$Q = P\,\frac{x'^2\,(3\,a - x')}{2\,a^3} + \frac{3}{8}\, pa - 3\,\frac{EI\,h}{a^3} \quad \ldots\ldots\ldots [\,7\,]$$

Cette valeur étant substituée dans les six équations précédentes on connaîtra pour un point quelconque le moment d'élasticité, la résistance R' la courbure $\frac{1}{\rho}$, l'inclinaison $f'(x)$ ou $f'_1(x)$, et l'ordonnée y.

129. S'il existe entre A et B un point d'inflexion on le déterminera en égalant à zéro le 2^{d} membre de l'équation [1] ou [4].

130. <u>Cas particulier</u>. $h = 0$ et $p = 0$, d'où résulte $Q = P\,\frac{x^2(3\,a - x)}{2\,a^3}$

L'équation [4] devient $M\{A\} = -Q(a-x)$ ce qui montre que de C en B la courbure va en diminuant de valeur absolue et devient nulle en B.

L'équation [1] peut s'écrire ainsi

$$M\{A\} = Px' - Qa - (P-Q)x \quad \ldots\ldots [\,8\,]$$

quantité positive ou négative selon que la concavité de la courbe est vers le bas ou le haut. Cette fonction étant du 1er degré a toute ses valeurs comprises entre les extrêmes. savoir

Pour	$x = 0$	$Px' - Qx$
Pour	$x = x'$	$-Q(a-x')$

La première est négative évidemment. La 2e est positive, sans quoi toutes les valeurs de $M\{A\}$ de A en C seraient négatives, et comme il en est de même entre C et B, la courbe partout concave vers le haut ne pourrait passer en B.

Cela posé, la plus grande courbure aura lieu en A ou en C selon que la quantité positive

$$Px' - Qa \quad \text{sera} \quad > \quad \text{ou} \quad < \quad Q(a-x')$$

Posons $$Px' - Qa - Q(a-x') = \beta\, P\, x'$$

les deux cas d'inégalité auront lieu suivant que β sera positif ou négatif. Substituons la valeur de Q on a

$$P\,x' - P\,\frac{x'^2(3\,a-x')}{2\,a^3}(2\,a-x') = \beta\, P\, x'$$

ou $$2 - \frac{x'}{a}\left(3 - \frac{x'}{a}\right)\left(2 - \frac{x'}{a}\right) = \beta \qquad \text{ou enfin} \qquad n^3 - 5\,n^2 + 6\,n - 2 = -\beta$$

en faisant $\frac{x}{a} = n$, si l'on suppose $\beta = o$, une des racines de cette équation est $n = 1$, ce qui devait être puisque si $x' = a$ les courbures en A et C sont toutes deux nulles. La dernière équation divisée par $(n-1)$ devient

$$n^2 - 4\,n - 2 = \frac{\beta}{1-n} \quad \text{d'où} \quad n = 2 - \sqrt{2 + \frac{\beta}{1-n}},$$

une seule valeur, attendu que n est < 1.

Si $\beta = 0$ on a $n = 0{,}586$ et les deux courbures de sens contraires en A et C sont de même grandeur absolue.

Si $\beta > 0$ on a $n = 0{,}586$; c'est le contraire si $\beta > 0$

Ainsi suivant que x' est $>$ ou $<$ $0{,}586\,a$, la plus grande courbure est en A ou C.

131. <u>Longueur de la flèche</u>. Supposant que le point de la courbe est entre C et B il égalera à zéro le 2nd membre de l'équation [5], en y faisant $p = 0$ et $Q = P\,\frac{x'^2(3\,a-x')}{2\,a^3}$.

on trouvera $$x = a\left(1 - \sqrt{\frac{a-x'}{3\,a-x'}}\right)$$

Cette quantité devant être $> x'$ on posera $a - a\sqrt{\frac{a-x'}{3\,a-x'}} > x'$

d'où $a - x' > a\sqrt{\frac{a-x'}{3\,a-x'}}$ ou $(3\,a-x')(a-x') > a^2$, ou $4\,a^2 - 4\,ax' + x'^2 > 2\,a^2$, ou $2\,a - x' > a\sqrt{2}$, enfin $x' < a(2-\sqrt{2})$ ou $x' < 0{,}586\,a$

Ainsi selon que x' est < ou > a, le point le plus bas de la courbe est entre C et B ou entre C et A.

Admettant la première hypothèse on substituera la valeur ci-dessus de x dans l'équation [6] et l'on aura en désignant la flèche par f

$$EI\ f = P\,\frac{x^2\,(a - x')}{6}\,\sqrt{\frac{a - x'}{3\ a - x'}}$$

132. Cas plus particulier $\rho_0 = 0$, $p = 0$, $x' = \frac{1}{2}\,a$

La plus grande courbure est en A, et le point le plus bas est entre B et C. En faisant la substitution des valeurs ci-dessus dans l'équation [7] du n° 128 on a

$$Q = \frac{5}{16}\,P$$

mettant cette valeur dans [8] du n° 130, et faisant $x = 0$, on a au point A

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{R'\,I}{v'} = \frac{1}{2}\,Pa - \frac{5}{16}\,Pa = \frac{3}{16}\,Pa$$

tandis que si la pièce était librement posée en A (121) comme en B, le maximum de $\frac{EI}{\rho}$ serait en C et égal à $\frac{1}{4}\,Pa$.

La substitution de $x' = \frac{1}{2}\,a$ dans la formule finale du n° 131 donne

$$f = \frac{1}{48}\,\frac{Pa^3}{EI}\,\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{0{,}45}{48}\,\frac{Pa^3}{EI}$$

tandis que si la pièce était librement posée aux deux bornes, la flèche serait (125) $\frac{1}{48}\,\frac{Pa^3}{EI}$.

133. Autres cas particuliers $h = 0$, et $P = 0$.

La valeur de Q [7] devient $Q = \frac{3}{8}\,pa$ et les équations [1] et [4] du n° 128 se réduisent, pour toute la courbe AB, à

$$M\,\{A\} = \frac{1}{2}\,p\,(a - x)^2 - \frac{3}{8}\,pa\,(a - x) = \frac{1}{2}\,p\,(a - x)\,(\frac{1}{4}\,a - x)$$

cette quantité est nulle par $x = a$, c'est-à-dire à l'extrémité B, et par $x = \frac{1}{4}\,a$ ce qui fait connaître le point d'inflexion de la pièce. Le maximum de courbure entre le point d'inflexion et l'extrémité B s'obtient en égalant à zéro la dérivée du second membre, savoir

$$\frac{-1}{4}\,a + x - a + x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{5}{8}\,a\ .$$

Substituant on a le maximum cherché de $M\,\{A\}$ en valeur absolue

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{T'\,I}{v'} = \frac{9}{128}\,pa^2$$

À partir de l'extrémité A jusqu'au point d'inflexion, la courbure va en diminuant ; la plus grande valeur du moment d'élasticité obtenue en faisant $x = 0$ dans l'expression générale ci-dessus est

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{T'I}{v'} = \frac{1}{8} pa^2 = \frac{16}{128} pa^2$$

et excède par conséquent le maximum ci-dessus.

Lorsque la pièce est simplement posée à ses deux extrémités on a également au point de la plus grande courbure $\frac{EI}{\rho} = \frac{1}{8} pa^2$, mais ce point est au milieu de la pièce.

134. On trouvera le point le plus bas de la courbe, en égalant à zéro le 2[d] membre de l'équation [5] après y avoir fait $p = 0$ et $Q = \frac{3}{8} pa$. On a, en supprimant le facteur x qui répond au point A,

$$\frac{1}{2} p\left(a^2 - ax = \frac{x^2}{3}\right) - \frac{3}{8} pa\left(a - \frac{x}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - \frac{15}{8} ax + \frac{3}{4} a^2 = 0$$

d'où $$x = 0{,}58 \ldots . a$$

substituant cette valeur dans l'équation [6], avec $P = 0$ et $Q = \frac{3}{8} pa$ on trouve pour la flèche f

$$EI\ f = 0{,}0067 \ldots . pa \,.\, a^3$$

à peu près le double de la valeur précédente.

6° Prisme maintenu horizontal en deux points AB de niveau, soumis dans l'intervalle à une charge pa *uniformément répartie sur la longueur AB ou a et une force distincte P appliquée au point C*

135. (fig. 32) Soit Q la réaction verticale de l'appui au point B. On peut toujours supposer que la pièce est maintenue horizontale en B au moyen d'un appui supérieur qui exerce en B' une réaction verticale Q' dont la distance du point A est séparée par a'.

Considérant Q' et Q comme connues on suivra une marche analogue à celle du n° 128 ; on trouvera l'inclinaison et l'ordonnée au point B, qu'on égalera toutes deux à zéro, ce qui déterminera Q et Q'.

A cet effet on fait, dans les six formules de n° 115, $\alpha = 0$ on remplacera P' par P, x' par δ, P'' par $-Q$, x'' par a, P''' par Q', x''' par a', en supprimant les termes relatifs à d'autres forces $P^{IV} \ldots . P^{(n)}$.

On a ainsi les six équations suivantes qu'on pourrait d'ailleurs obtenir directement ;

1° pour la courbe AC

$$[\,1\,] \ldots . EI\ f''(x) = \frac{1}{2} p(a-x)^2 + P(\delta - x) - Q(a-x) + Q'(a'-x)$$

$$[\,2\,] \ldots . EI\ f'(x) = \frac{1}{2} p\left(a^2 x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P\left(\delta\, x - \frac{x^2}{2}\right) - Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + Q'\left(a'x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$[\,3\,] \ldots . EI\ y = \frac{1}{2} p\left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P\left(\frac{\delta\, x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - Q\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + Q'\left(\frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

2° pour la courbe CB

$$[\,4\,]\ldots. EI\,f''_1(x)=\frac{1}{2}\,p\,(a-x)^2-Q\,(a-x)+Q'\,(a'-x)$$

$$[\,5\,]\ldots. EI\,f'_1(x)=\frac{1}{2}\,p\left(a^2x-ax^2+\frac{x^3}{3}\right)+P\,\frac{\delta^2}{2}-Q\left(ax-\frac{x^2}{2}\right)+Q'\left(a'x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$[\,6\,]\ldots. EI\,y=\frac{1}{2}\,p\left(\frac{a^2x^2}{2}-\frac{ax^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right)-\frac{P\,\delta^3}{6}+\frac{P\,\delta^2x}{2}-Q\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+Q'\left(\frac{a'x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$

Cela posé, d'après l'énoncé, les équations [5] et [6] doivent être satisfaites quand on y fait $x = a$, $f'_1(x) = 0$; $y = 0$, ce qui donne

$$[\,7\,]\ldots. 0=\frac{1}{6}\,pa^3+P\,\frac{\delta^2}{2}-Q\,\frac{a^2}{2}+Q'\,a\left(a'-\frac{a}{2}\right)$$

$$[\,8\,]\ldots. 0=\frac{1}{8}\,pa^4+P\,\frac{\delta^2}{2}\left(a-\frac{\delta}{3}\right)-Q\,\frac{a^3}{3}+Q'\,\frac{a^2}{2}\left(a'-\frac{a}{3}\right)$$

deux équations du premier degré pour les deux inconnues Q et Q'.

136. Cas particulier $p = 0$. Pour simplifier les calculs faisons abstraction du poids de la pièce et de la charge répartie. Par $p = 0$ l'équation [1] peut s'écrire ainsi

$$\frac{EI}{\rho}=\frac{R'\,I}{v'}=P\,\delta+Q'\,a'-Qa-(P-Q+Q')\,x$$

cette expression du moment d'élasticité étant du 1er degré, il s'ensuit que de A à C la plus grande courbure ou la plus grande résistance R' a lieu en A ou en C. Soit μ et μ' les moments d'élasticité en ces deux points ; on les obtient en faisant successivement $x = 0$ et $x = \delta$. On a ainsi

$$\mu=P\,\delta+Q'\,a'-Q\,a \quad\text{et}\quad \mu'=Q'\,a'-Q\,a+(Q-Q')\,\delta$$

Pour comparer ces deux quantités il faut tirer les valeurs de Q et Q' des équations [7] et [8] après y avoir fait $p = 0$, on obtient

$$Q'=P'\,\frac{\delta^2\,(a-b)}{a^2\,(a-a')} \quad\text{et}\quad Q=P\,\frac{\delta^2\,(3\,aa'-2\,a^2+\delta\,a-2\,\delta\,a')}{a^2\,(a-a')}$$

d'où l'on conclus

$$Q'\,a'-Q\,a=P\,\frac{\delta^2\,(\delta-2\,a)}{a^2} \quad\text{et}\quad Q-Q'=P\,\frac{\delta^2\,(3\,a-2\,\delta)}{a^3}$$

et en substituant ces valeurs dans les expressions ci-dessus de μ et de μ'

$$\mu=P\,\frac{\delta\,(a-d)^2}{a^2} \quad\text{et}\quad \mu'=-\,2\,P\,\frac{\delta^2\,(a-\delta)^2}{a^2}$$

ainsi μ est positif, μ' négatif, et le rapport de leurs valeurs absolues

$$-\frac{\mu}{\mu'}=\frac{a}{2\,\delta}\ ;$$

de sorte que μ est plus grand ou plus petit que μ' selon que δ est plus petit ou plus grand que $\frac{1}{2}\,a$, c'est-à-dire selon que le point C est plus près ou plus loin de A que de B.

La pièce étant horizontale en B comme en A, ce qui vient d'être dit de la courbe AC s'applique exactement à la courbe BC pourvu seulement qu'on remplace la distance AC que l'on désigne δ par la distance BC que nous représenterons par δ' ; de sorte que si nous appelons μ'' le moment d'élasticité au point B, nous aurons

$$-\frac{\mu''}{\mu'} = \frac{a}{2\,\delta'} \qquad \text{et par conséquent} \qquad \frac{\mu}{\mu''} = \frac{\delta'}{\delta}$$

Il s'ensuit que si l'on a $\delta' > \delta$, par conséquent $a > 2\,\delta$ et $a < 2\,\delta'$, l'ordre de grandeur du moment d'élasticité est $\mu > \mu' > \mu''$

En définitive, si l'on appelle δ la plus petite des deux distances du point C aux points A et B, le plus grand moment d'élasticité dans toute l'étendue de la pièce est

$$P\,\frac{\delta\,(a-\delta)^2}{a^2}$$

137. Cas plus particuliers $p = 0$ et $\delta = \frac{1}{2}\,a$. On a alors

$$\mu = \mu' = \mu'' = \frac{1}{8}\,Pa$$

tandis que la pièce était simplement posée en A et B, le plus grand moment d'élasticité serait en C et (121) serait

$$\frac{1}{4}\,Pa$$

Pour avoir la valeur de la flèche f , dans ce cas il suffit de faire dans la formule [3] du n° 135, $p = 0$, $x = \delta = \frac{1}{2}\,a$ et d'y mettre la valeur que prennent dans ces hypothèses les forces Q et Q' d'après les formules du n° 136 savoir

$$Q' = \frac{1}{8}\,P\,\frac{a}{a'-a} \qquad \text{et } Q = \frac{1}{8}\,P\,.\,\frac{4\,a'-3\,a}{a'-a}\ ;$$

on trouve

$$EI\,f = \frac{1}{24}\,P\left(\frac{a}{2}\right)^3$$

tandis que si la pièce était simplement posée en A et B on aurait

$$EI\,f = \frac{1}{6}\,P\left(\frac{a}{2}\right)^3$$

Entre A et C est un point d'inflexion dont on aura l'abscisse en faisant les substitutions précédentes dans le 2^{d} membre de l'équation [1] et l'égalant à zéro. On trouve $x = \frac{1}{4}\,a$ comme il était facile de le prévoir.

138. Autre cas particulier : prisme chargé uniformément, $P = 0$. Par cette hypothèse les équations [7] et [8] du n° 135 se réduisent à

$$0 = \frac{pa^2}{3} - Qa + Q'(2a' - a)$$

$$0 = \frac{3\,pa^2}{8} - Qa + Q'\left(\frac{3}{2}a' - \frac{1}{2}a\right)$$

d'où $Q' = \frac{1}{12}\,\frac{pa^2}{a' - a}$ et $Q = \frac{1}{12}\,\frac{pa}{a' - a}(6a' - 5a)$

D'après ces valeurs l'équation [1] du n° 135 devient

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{T'I}{v'} = \frac{1}{12}\,p\left(a^2 - 6ax + 6x^2\right) = \frac{1}{2}\,p\left(\left(\frac{1}{2}a - x\right)^2 - \frac{a^2}{12}\right)$$

Il en résulte

1° qu'au point A, où $x = 0$, le moment d'élasticité est $\frac{1}{12}\,pa^2$

2° qu'il diminue ensuite et devient nul, au point d'inflexion dont l'abscisse est donné par l'équation

$$\frac{1}{2}a - x = \frac{a}{2\sqrt{3}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}211\,a$$

3° qu'il devient ensuite négatif, et croît en valeur absolue jusqu'au point C où par $x = \frac{1}{2}a$ il devient

$$-\frac{1}{24}\,pa^2$$

4° qu'au delà du milieu C, le moment d'élasticité repasse par les mêmes valeurs précédentes.

5° que par conséquent la plus grande courbure a lieu en A.

Si la pièce chargée uniformément était simplement posée sur les appuis A et B le plus grand moment d'élasticité (121) serait $\frac{1}{8}\,pa^2$, au lieu de $\frac{1}{12}\,pa^2$; il existerait en C et non en A.

139. On trouvera la flèche f dans le cas dont il s'agit en substituant dans la formule [3] du n° 135 les valeurs ci-dessus de Q et Q', en même temps que $P = 0$ et $x = \frac{1}{2}a$. On a ainsi

$$EI\,f = \frac{1}{24}\,p\left(\frac{a}{2}\right)^4$$

tandis que si la pièce était simplement posée on aurait (125)

$$EI\,f = \frac{5}{24}\,p\left(\frac{a}{2}\right)^4$$

7° Prisme posé sur trois appuis de niveau B′, A, B, soumis à une charge uniformément répartie, et à deux forces distinctes P′, P aux points intermédiaires C′, C. fig. 33.

140. Soit $AB = a$, $AC = \delta$, $AB' = A'$, $AC' = \delta'$.

Appelons Q et Q' les réactions inconnues des appuis B, B'. Désignons par α l'angle de la tangente en A avec l'horizontale AB. Nous aurons pour la courbe AC conformément aux formules générales du n° 115

$$[\,1\,] \ldots . \quad EI\, f''(x) = \frac{1}{2}\, p\,(a-x)^2 + P\,(\delta - x) - Q\,(a-x)$$

$$[\,2\,] \ldots . \quad EI\left(f'(x) - tang\,\alpha\right) = \frac{1}{2}\, p\left(a^2 x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P\left(\delta\, x - \frac{x^2}{2}\right) - Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$[\,3\,] \ldots . \quad EI\,(y - x\, tang\,\alpha) = \frac{1}{2}\, p\left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P\left(\frac{\delta\, x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - Q\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

et pour la courbe CB

$$[\,4\,] \ldots . \quad EI\, f''_1(x) = \frac{1}{2}\, p\,(a-x)^2 + P\,(\delta - x) - Q\,(a-x)$$

$$[\,5\,] \ldots . \quad EI\left(f'_1(x) - tang\,\alpha\right) = \frac{1}{2}\, p\left(a^2 x - ax^2 + \frac{x^3}{3}\right) + P\,\frac{\delta^2}{2} - Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$[\,6\,] \ldots . \quad EI\,(y - x\, tang\,\alpha) = \frac{1}{2}\, p\left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + P\,\frac{\delta^3}{6} - Q\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Cette dernière équation doit être satisfaite par $x = a$ et $y = 0$ ce qui donne la relation

$$[\,7\,] \ldots . \quad EI\, tang\,\alpha + \frac{1}{8}\, pa^3 + P\,\frac{\delta^2}{2}\left(1 - \frac{\delta}{3\,a}\right) - Q\,\frac{a^2}{3} = 0$$

Maintenant remarquons que la partie $AC'B'$ du prisme donnerait une équation toute pareille, à l'exception que $tang\,\alpha$ serai remplacée par $-tang\,\alpha$; a par a' ; δ, P et Q par δ', P' et Q' : ce qui donne

$$[\,8\,] \ldots . \quad EI\, tang\,\alpha + \frac{1}{8}\, pa'^3 + P'\,\frac{\delta'^2}{2}\left(1 - \frac{\delta'}{3\,a'}\right) - Q'\,\frac{a'^2}{3} = 0$$

En ajoutant [7] et [8] on éliminerait $tang\,\alpha$ et l'on aurait une équation entre les deux inconnues Q et Q'.

On obtient une autre équation en remarquant qu'en vertu de l'équilibre du prisme, on a en prenant les moments par rapport au point A

$$[\,9\,] \ldots . \quad Qa - Q'a' - p\,\frac{a^2}{2} + p\,a'^2 - P\,\delta + P'\,\delta' = 0$$

Les inconnues Q, Q' et $tang\,\alpha$ se trouvent donc déterminées par trois équations du premier degré, et leurs valeurs étant substituées dans les six formules précédentes, celles-ci donneront toutes les circonstances de la flexion de la pièce.

141. Cas particulier $P = 0$, $P' = 0$. Les équations [7], [8] et [9] donnent dans ce cas

$$Q\,a^2 + Q'\,a'^2 = \frac{3}{8}\,p\left(a^3 + a'^3\right)$$

$$Q\,a - Q'\,a' = \frac{1}{2}\,p\left(a^2 + a'^2\right)$$

d'où en multipliant la 2e par a' et ajoutant

$$Qa\,(a + a') = \frac{1}{2}\,p\left(\left(a^2 - a'^2\right)a + \frac{3}{4}\left(a^3 + a'^3\right)\right)$$

ou
$$Qa = \frac{1}{2}\,p\left(a'(a - a') + \frac{3}{4}\left(a^2 - aa' + a'^2\right)\right)$$

ou
$$Q = \frac{1}{8}\,p\left(3\,a + a' - \frac{a'^2}{a}\right)$$

et en changeant les accents

$$Q' = \frac{1}{8}\,p\left(3\,a' + a - \frac{a^2}{a'}\right)$$

142. L'une de ces forces peut devenir négative, c'est-à-dire que la pièce tendrait à soulever l'un des appuis extrêmes. Par exemple Q est négative si l'on a

$$a'^2 - aa' > 3\,a^3 \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{a} > \frac{1}{2} + \sqrt{3{,}25} \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{a} > 2{,}303\ .$$

Soit S la réaction de l'appui A ; on aura

$$S + Q + Q' = p\,(a + a')$$

et par suite des formules précédentes

$$S = \frac{1}{2}\,p\,(a + a')\left\{\frac{5}{4} + \frac{(a' - a)^2}{4\,aa'}\right\}\ ;$$

d'où il résulte :

1° que l'appui intermédiaire A porte toujours plus de la moitié de la charge totale $p\,(a + a')$;

2° que la force S croît indéfiniment à mesure que l'une des distances a, a', croît, tandis que leur somme reste constante.

143. Dans le cas plus particulier où $a = a'$ on a

$$Q = Q' = \frac{3}{8}\,pa \qquad \text{et} \qquad S = \frac{10}{8}\,pa\ .$$

ce qui est conforme avec le résultat du n° 133, car dans cette hypothèse la pièce est horizontale en A.

Si dans les formules [7], [8], [9] du n° 140 on fait

$$a = a'\ ,\ \delta = \delta' = \frac{1}{2}\,a\ ,\ p = 0\ ,\ P = P'\ ,$$ on trouve

$$Q = \frac{5}{16} P \qquad \text{et par suite} \qquad S = \frac{22}{16} P$$

ce qui est d'accord avec le résultat du n° 132.

Il est visible que la méthode suivie au n° 140 est applicable à une pièce prismatique soutenue par un nombre quelconque d'appuis, même dans le cas où ces appuis, d'ailleurs situés dans le plan des forces ne seraient pas tout à fait en ligne droite.

8° *Aiguilles verticales supportant une charge d'eau.*

144. Soient l la largeur d'une aiguille, perpendiculairement au plan de la figure 34, et C son épaisseur dans le sens de la poussée d'eau. Faisons $AB = a$, $AC = l$, $AD = l'$, $CM = z$.

La pression en amont sur un élément superficiel, dont la hauteur est MM' ou dz et la largeur est l, s'exprime par $\Pi\, z\, .\, ldz$ en désignant par Π le poids du mètre cube d'eau ; la somme des pressions en amont est donc $\frac{1}{2}\Pi\, lh^2$. De même la somme des pressions en aval est $\frac{1}{2}\Pi\, l\, h'^2$, ces pressions sont en équilibre avec les réactions Q, Q' des appuis B,A. On aura Q en prenant les moments par rapport à A, savoir

$$Q\, a = \int_0^h \Pi\, l\, z\, d\, z\, (l - z) - \int_0^{l'} \Pi\, l\, z\, d\, z\, (l' - z) = \frac{1}{6} l\, (h^3\, l'^3)$$

donc
$$Q' = \frac{1}{2}\Pi\, l\, (h^2 - h'^2) - \frac{1}{6}\Pi\, \frac{l}{a}\, (h^3 - h'^3)$$

Maintenant pour un point quelconque entre D et C, tel que M, on aura en considérant les forces qui agissent au dessus de ce point

$$\frac{R'\, I}{v'} = Q\, (z + (a - h)) - \int_{x=0}^{x=x} \Pi\, a\, l\, d\, x\, (z - x)$$

ou
$$\frac{R'\, I}{v'} = Q\, (z + (a - h)) - \frac{1}{6}\Pi\, l\, z^3 \ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

Le point de plus grande courbure entre C et D s'obtient en égalant à zéro la dérivée du second membre:

$$0 = Q - \frac{1}{2}\Pi\, l\, z^2\, ,\ 0 = \frac{1}{6}\Pi\, \frac{l}{a}\, (h^3 - l'^3) - \frac{1}{2}\Pi\, l\, z^2\, , \quad \text{d'où} \quad z = \sqrt{\frac{h^3 - h'^3}{3\, a}}$$

valeur qui n'est applicable à la question qu'autant qu'elle se trouvera plus petite que CD ou h-h'.

Cette condition étant vérifiée on aura l'expression du plus grand moment d'élasticité en substituant la valeur de z ci-dessus dans la formule précédente [1].

Dans le cas contraire il faudra chercher le point de plus grande flexion entre A et D.
Soit y la distance Am' d'un point quelconque de la courbe AD au point A. L'équilibre de cette partie sous l'action de la force Q' ci-dessus calculée, et des pressions d'amont et d'aval donnera

$$\frac{R'\, I}{v'} = Q'\, y - \Pi\, (h - h')\, l\, y\, .\, y^2\, ,$$

et le maximum de flexion répondra à l'équation

$$Q' - \Pi\,(h - h')\,l\,y = 0$$

d'où $$y = \frac{h + h'}{2} - \frac{h^3 - h'^3}{6\,a\,(h - h')} \quad \text{et} \quad \frac{R'\,I}{v'} = \frac{Q'\,y}{2}\ ;$$

on a enfin, en éliminant Q' et y, l'expression du maximum du moment d'élasticité entre A et B, savoir

$$\frac{R'\,I}{v'} = \frac{\Pi\,l\,(h - h')}{2}\left(\frac{h + h'}{2} - \frac{h^3 - h'^3}{6\,a\,(h - h')}\right)^2$$

qui ne sera applicable qu'autant que la valeur précédente de y sera plus petite que h'.

145. On peut éviter les intégrations, d'ailleurs très faciles, du n° précédent à l'aide d'une construction géométrique connue où l'on représente la pression exercée par l'eau sur un plan, par un prisme dont le centre de gravité correspond au centre de pression.

146. On suppose maintenant que les aiguilles verticales soutenant une charge d'eau s'appuie contre trois traverses horizontales et équidistantes *A, B, C* (fig. 35). Le niveau d'amont affleure l'appui supérieur *C* et il n'y a point d'eau en aval. On demande les pressions *Q, S, Q'* exercées par les appuis *C, B, A*.

Soit $AB = BC = a$ et $cm = x$. En un point quelconque m de la courbe CB on a, en faisant diminuer la dimension perpendiculaire à la figure égale à l'unité linéaire,

$$EI\,f''(x) = \frac{1}{6}\,\Pi\,x^3 - Q\,x$$

En intégrant, il vient

$$EI\,f'(x) = C + \frac{1}{24}\,\Pi\,x^4 - \frac{1}{2}\,Q\,x^2$$

pour $x = a$, soit $f'(x) = tang\ \alpha$ inclinaison de la courbe en B.

Ainsi $$EI\ tang\ \alpha = C + \frac{1}{24}\,\Pi\,a^4 - \frac{1}{2}\,Q\,a^2$$

donc $$EI\left(f'(x) - tang\ \alpha\right) = -\frac{1}{24}\,\Pi\left(a^4 - x^4\right) + \frac{1}{2}\,Q\left(a^2 - x^2\right)$$

Intégrant de nouveau on a, attendu que x et y deviennent nuls simultanément

$$EI\,(y - x\ tang\ \alpha) = -\frac{\Pi}{30}\,a^4 + \frac{1}{3}\,Q\,a^2 \ldots\ldots\ [\,1\,]$$

Actuellement en un point quelconque m' de la courbe AB si l'on prend l'origine des y' et x' en A et par conséquent $Am' = x'$, on a

$$EI\,f''_1(x') = \Pi\,a\,x'^2 - \frac{1}{6}\,\Pi\,x'^3 - Q'\,x'$$

ce qu'on voit en représentant la pression sur Am' par le rectangle $ADEm'$ moins le triangle DEF. L'intégration donne

$$EI\, f'_1(x') = \Pi\left(\frac{1}{3}\, a\, x'^3 - \frac{1}{24}\, x'^4\right) - \frac{1}{2}\, Q'\, x'^2 + C\,.$$

pour $x' = a$ on a $f'_1(x') = -\,tang\,\alpha$; donc en éliminant C

$$EI\left(f'_1(x') + tang\,\alpha\right) = -\,\Pi\left(\frac{a}{3}\left(a^3 - x'^3\right) - \frac{1}{24}\left(a^4 - x'^4\right)\right) + \frac{1}{2}\, Q'\left(a^2 - x'^2\right)$$

L'intégrale de cette équation, attendu qu'on a en même temps $x' = 0$ et $y = 0$, est

$$EI\,(y' + x'\,tang\,\alpha) = -\,\Pi\left(\frac{a}{3}\left(a^3\, x' - \frac{x'^4}{4}\right) - \frac{1}{24}\left(a^4\, x' - \frac{x'^5}{5}\right)\right) + \frac{1}{2}\, Q'\left(a^2\, x - \frac{x'^3}{3}\right)$$

y doit encore devenir nul par $x' = a$, ce qui donne

$$EI\, tang\,\alpha = -\,\Pi\,\frac{13}{60}\, a^4 + \frac{1}{3}\, Q'\, a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Éliminant $tang\,\alpha$ des deux équations [1] et [2] on obtient

$$Q + Q' = \frac{3}{4}\,\Pi\, a^2$$

d'ailleurs on a la pression totale des appuis

$$Q + Q' + S = 2\,\Pi\, a^2$$

Et en prenant les moments de toutes les forces par rapport à B on trouve

$$(Q - Q')\, a = 2\,\Pi\, a^2 \cdot \frac{a}{3} \qquad \text{ou} \qquad Q' - Q = \frac{2}{3}\,\Pi\, a^2$$

On a ainsi trois équations très simples entre les trois forces Q, Q' et S. Si l'on désigne par P la pression totale de l'eau $2\,\Pi\, a^2$ on a

$$Q' = \frac{17}{48}\, P\,, \qquad Q = \frac{1}{48}\, P\,, \qquad S = \frac{30}{48}\, P\,.$$

Les efforts supportés par les pièces *A, B, C* étant ainsi connus, on pourra déterminer les dimensions qui leur conviennent (123). On pourrait se proposer et résoudre la question de savoir à quelle distance l'appui B devrait se trouver en arrière de la verticale AC pour que les charges S et Q fussent égales.

§: 5. *Données expérimentales et applications.*

147. Nous extrayons les tableaux ci-dessous de l'ouvrage intéressant et très utile intitulé Études théoriques et expérimentales sur l'établissement des charpentes à grande portée par M. Ardant officier du génie en renvoyant comme il le fait lui-même aux ouvrages connus de MM. Navier, Poncelet et Morin.

Les quatre dernières colonnes du second tableau se rapportent à des prismes de grande longueur pressés suivant cette longueur. Les théories connues sur ce sujet ne sont relatives qu'à des prismes très minces et ne s'appliquent pas aux pièces employées dans les constructions.

I *Tableau de la résistance des corps à l'extension*

Désignation des substances	Coefficient d'élasticité E divisé par 1 000 000	Tension par millimètre carré produisant la rupture	R_I divisé par 1 000 000 ou limite des efforts permanents par millimètre carré
Bois de chêne	1,200 K	6 K	0,50 à 0,70 K
Bois de sapin	1,300	8	0,60 à 0,80
Arcs en planches de charpente	500	3	0,25 à 0,30
Fil de fer en câbles	18,000	30	6 à 10 } selon
Fer forgé au-dessus de 0^m06 de côté	18,000	40	4 à 8 } la
Fer forgé au-dessous de 0^m06 de côté	20,000	60	6 à 10 } qualité
Fonte grise qui n'est pas exposée à des chocs	12,000	12.5	7,5

II *Tableau de la résistance à l'écrasement*

Désignation des substances	Poids du mètre cube	Poids qui produit l'écrase-ment d'un cube de 0^m01 de côté	Limite des charges permanentes par million. q. le rapport de la longueur au petit côté de la base étant				
			au-dessous de 12	12	24	48	60
Chêne fort	980 Kil	300 Kil	0^k,3	0,25	0,15	0,05	0,025
Chêne faible	900	190	0,19	0,084	0,056	"	"
Sapin jaune ou rouge	671	375	0,375	0,31	0,187	0,075	"
Sapin blanc	550	97	0,097	0,082	0,049	"	"
Fer forgé	7,783	4.900	10,	8,35	5,	1,67	0,84
Fonte de fer	7,202	10.000	20,	16,70	10,	3,33	1,67

148. Une pièce de chêne encastrée horizontalement par un bout est chargée à l'autre bout d'un poids P ; sa longueur saillante est a, son équarrissage est de l de largeur sur C de hauteur. Déterminer le maximum pratique de P eu égard au poids propre de la pièce qui est Π par mètre cube. Les formules sont (117 et 102)

$$\frac{R' I}{v}' = \left(\frac{1}{2} pa + P\right) a , \qquad I = \frac{1}{12} lc^3 ,$$

dans lesquels il faut faire $v' = \frac{1}{2} C$, $pa = \Pi\, a\, l\, c$,

Ainsi

$$P + \frac{1}{2} \Pi\, abc = \frac{1}{6} \frac{b\, c^2}{a} R' \text{ où l'on ferait } R' = 0{,}6 \times 10^6 \text{ et environ } \Pi = 900$$

si l'on demande la hauteur dont l'extrémité libre s'abaisse on a (119)

$$h = \frac{1}{E\,I}\left(\frac{p\,a}{8} + \frac{P}{3}\right)a^3 = \frac{12\,a^3}{b\,c^3\,E}\left(\frac{\Pi\,abc}{8} + \frac{P}{3}\right).$$

et l'on doit faire $E = 1200 \times 10^6$

149. Un pertuis étant fermé par des poutrelles horizontales, la chute totale est H, la distance des appuis a ; déterminer l'épaisseur c des poutrelles. Celles qui sont en-dessous du niveau d'aval supportent une charge due à la hauteur H. La formule est en faisant $P = 0$ et $R' = R$, donc celle du n° 121

$$\frac{R_1\,I}{V'} = \frac{1}{8}\,p\,a^2 \;;$$

en appelant h la dimension verticale de la poutrelle, et Π le poids du mètre cube d'eau on a

$$p\,a = \Pi\,H\,ab \;;\; I = \frac{1}{12}\,b\,c^3 \quad \text{et} \quad v' = \frac{1}{2}\,C$$

la formule ci-dessus devient donc

$$\frac{1}{6}\,R_1\,b\,c^2 = \frac{1}{8}\,\Pi\,H\,a^2\,b \qquad \text{d'où} \qquad C^2 = \frac{3}{4}\,\frac{\Pi\,H\,a^2}{R_1}$$

si les poutrelles sont en chêne on pourra en réduire autant que possible l'équarrissage, faire $R_1 = 0{,}8 \times 10^6$; si elles sont en sapin on fera $R_1 = 0{,}9 \times 10^6$.

§: 6. *Solides d'égale résistance.*

150. Lorsqu'un solide offre une grande longueur, relativement à ses dimensions transversales, mais que celles-ci varient au lieu de rester constantes comme nous l'avons supposé au §: 2 et suivants, si cette variation se fait par degrés peu sensibles, on peut concevoir la longueur divisée en plusieurs parties pour chacune desquelles la pièce diffère peu d'un prisme. Par conséquent si l'on considère une section $\alpha\,a'$ (fig. 16), au-delà de laquelle la pièce soit soumise à des forces sensiblement parallèles à cette section, on peut admettre que l'équation $\sum M\{F\}_0 = \sum M\{A\}_0$ a encore lieu, et que le moment d'élasticité $\sum M\{A\}_0$ peut encore s'exprimer par

$$\frac{R'\,I}{V'} \qquad \text{ou par} \qquad E\,I\int''(x)$$

comme aux n^{os} 99 et 101, en appelant I le moment d'inertie de la section $\alpha\,a'$ par rapport à un axe o passant par le centre de gravité et perpendiculaire à la direction des forces F, et en désignant par $\int(x)$ l'étendue du déplacement d'un point quelconque de la ligne droite ou peu courbe passant par les centres de gravité des sections transversales.

151. Considérons le cas où la pièce de section variable et de faible courbures est à peu près horizontale, maintenu dans cette situation en A vers un de ses bouts par des appuis, et sollicitée à l'autre bout B par une force verticale unique P, de socle qu'on néglige ici le poids propre de la pièce. Si l'on fait, (fig. 36), $AB = x$ et $AM = x$, on a en M :

$$\frac{R' I}{V'} = P (a - x)$$

équation qui diffère de celle qu'on aurait pour un prisme, en ce que I et V' sont variables. Supposons par exemple que les sections transversales de la pièce soient toutes rectangulaires, de sorte que la largeur h perpendiculaire au plan de la figure soit constante tandis que la hauteur $a\ a'$ est variable et représentée par z. On a alors (102) . . . . . $I = \frac{1}{12} b\ z^3$ et $V' = \frac{1}{2} z$. L'équation précédente devient donc

$$\frac{R' b z^2}{6} = P (a - x) ,$$

et l'on peut faire varier z de manière que R' maximum de résistance de la section correspondante à l'abscisse x soit constante dans toute l'étendue AB. La pièce est alors dite solide d'égale résistance relativement à toute force agissant comme P à l'extrémité B. Il faut pour cela que z^2 soit proportionnel à a - x, de sorte que si la ligne $A\ M\ B$ des centres de gravité est droite pour l'état naturel, la courbe $a\ B\ a'$, dont l'ordonnée variable $M\ a$ est $\frac{1}{2} z$, est une parabole du second degré dont le sommet est en B.

On peut sans changer la propriété du solide disposer de l'une des courbes $a\ B$, $a'\ B$ pourvue qu'elle diffère peu d'une droite.

152. Si la section transversale était circulaire d'un rayon variable z on aurait (110) $I = \frac{1}{4} \Pi\ R'\ z^4$ et $V' = z$ d'où

$$\frac{1}{4} \Pi\ R'\ z^3 = P (a - x)$$

équation de la courbe méridienne de la pièce supposée de révolution.

Dans les deux hypothèses précédentes si l'on voulait déterminer les moindres dimensions transversales correspondantes à une force donnée P, il faudrait attribuer à R' son maximum R, dépendant de la substance du corps.

153. Si la pièce maintenue horizontalement en A, supporte de A en B une charge uniformément répartie pa, on a en un point quelconque M

$$\frac{R' I}{V'} = \frac{1}{2} p (a - x)^2$$

soit, comme au n° 151, $I = \frac{1}{12} h z^3$ et $V' = \frac{1}{2} z$

d'où $$\frac{1}{6} R' h z^2 = \frac{1}{2} p (a - x)^2$$

le solide sera d'égale résistance relativement à cette répartition de la charge si x est proportionnel à a - x ; par conséquent si la ligne moyenne AMB est droite, les lignes aB, $a'B$, seront aussi des droites concourant en B.

§: 7. *Prismes soumis à des forces de directions quelconques.*

154. soit une pièce dont la portion $a\ a'\ B$ (fig. 37) naturellement droite ou courbe est faiblement déformée par l'action d'une ou de plusieurs forces. Appelons encore A les diverses réactions normales au plan aa', et supposons que la résultante des autres forces quelconques appliquées à la pièce soient décomposées en deux forces l'une N normale à aa', l'autre parallèle à cette même section. Soit a la distance de P à ce plan et soit y la distance de N au centre de gravité G de aa'.

Les diverses forces A et les deux forces P et Q satisfont aux deux équations

$$\sum A = N \qquad \text{et} \qquad \sum M\{A\}_6 = P\,a + N\,y$$

car on peut prendre pour axe des moments une droite quelconque du plan aa', et par conséquent l'axe G, quoique la fibre invariable ne passe plus dans ce cas par le centre de gravité, comme on va le voir.

Attendu que le glissement de la section bb', très voisine de aa', peut être considéré comme nul nous admettrons encore chaque force A pour un élément $d\omega$ est proportionnelle à la distance de cet élément à une droite projetée en 0 ou la réaction normale est nulle. Ainsi en désignant par V la distance OG et par γ, comme précédemment, la distance de l'élément $d\omega$ à la droite G nous aurons :

$$A = \varphi\,(\gamma + V)\,d\,\omega \qquad \text{d'où} \qquad \sum A = \varphi\,V\,\Omega \qquad \text{à cause de} \qquad \sum \gamma\,d\,\omega = 0$$

on a donc $$\varphi\,V\,\Omega = N \ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

et V n'est nul qu'en même temps que N.

Maintenant le moment d'une des forces A par rapport à G est $A\,\gamma$ ou $\varphi\,(\gamma + V)\,\gamma\,d\,\omega$; donc

$$\sum M\{A\}_G = \varphi \sum \gamma^2\,d\,\omega \quad (\text{à cause de } \varphi\,V \sum \gamma\,d\,\omega = 0)$$

on a donc pour le moment d'élasticité par rapport à l'axe G la même expression que lorsque la fibre invariable traverse cet axe, savoir

$$\sum M\{A\}_G = \varphi\,I$$

ainsi l'équation des moments devient $\varphi\,I = P\,a + N\,y$ . . . . . [2]

Enfin la quantité φ en appelant toujours R' la résistance par unité de surface au point qui est à la distance γ' du centre de gravité, satisfait à la relation

$$R'\,d\,\omega = \varphi\,(\gamma' + V)\,d\,\omega\,, \qquad \text{d'où } \varphi = \frac{R'}{\gamma' + V} \ldots\ldots [\,3\,]\,;$$

de sorte que si l'on suppose données les quantités $P\,,\ N\,,\ a\,,\ y\,,\ \Omega\,,\ I$ et γ', on a trois équations pour les trois inconnues $V\,,\ \varphi\,,\ R'$ on en conclut

$$\varphi = \frac{P\,a + N\,y}{I} \ldots [\,4\,] \qquad V = \frac{N\,I}{(P\,a + N\,y)\,\Omega} \ldots [\,5\,] \qquad R' = \frac{(P\,a + N\,y)\,\gamma'}{I} + \frac{N}{\Omega} \ldots [\,6\,]$$

On peut dans [4] remplacer φ comme précédemment par $\frac{E}{\varsigma}$ en appelant ς la distance à laquelle se rencontrent deux sections infiniment voisines qui dans l'état naturel seraient

parallèles. Ainsi le changement de courbure ou la flexion de la pièce vers la section aa' ne dépend que du moment de la résultante des forces P et N par rapport à G, quelle que soit le direction de cette résultante.

Mais l'équation [6] montre qu'il n'en est pas de même de la résistance R' qui se trouve composée de 2 parties, l'une due au moment $P\,a + N\,y$ et l'autre due à la composante verticale. C'est ce que Navier a énoncé (page 248 de ses leçons) sans le démontrer. (23)

155. Cas particulier : prisme vertical chargé d'un poids agissant à une certaine distance de l'axe de cette pièce. Appelons (fig. 38)

a la hauteur OA d'un prisme encastré verticalement en 0,

l la distance BC entre l'extrémité B et le point C ou s'applique le poids N

f la flèche de courbure AB produite par ce poids

y, x les coordonnées d'un point M de l'axe fléchi, par rapport aux axes 0_y, 0_x, l'un horizontal, l'autre vertical.

Si l'on néglige le poids propre de la pièce, le moment d'élasticité en M est égal au moment de N par rapport au centre de gravité M (154), et l'on a

$$E\,I\,f''(x) = N\left(l + f - y\right)$$

Pour intégrer cette équation, écrivons la sous la forme

$$\frac{d\,p}{d\,x} = K\,(b - y)\ ;$$

En posant . . . . . $p = \frac{d\,y}{d\,x}$

d'où en multipliant . . . . . $p\,d\,p = K\,(b - y)\,d\,y$

et en intégrant . . . . . $p^2 = K\left(2\,b\,y - y^2\right)$

sans constante attendu que p et y sont nuls en même temps.

La dernière équation devient

$$\sqrt{K}\,d\,x = \frac{d\,y}{\sqrt{2\,b\,y - y^2}} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{K}\,d\,x = \frac{d\,y}{\sqrt{b^2 - (b - y)^2}}$$

d'où en intégrant $$x\,\sqrt{K} = arc\left(\cos\,1 - \frac{y}{b}\right)$$

sans autre constante attendu que y et x sont nuls simultanément. Cette équation revient à celle-ci

$$1 - \frac{y}{b} = \cos\,x\,\sqrt{K} \qquad \text{ou} \qquad y = (l + f)\left(1 - \cos\,x\,\sqrt{\frac{N}{E\,I}}\right)$$

Maintenant pour $x = a$, y devient f ; d'où l'on conclut

$$f = l\left(\frac{1}{\cos\,a\,\sqrt{\frac{N}{E\,I}}}\right) - 1 \qquad \ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

formule dans laquelle il est aisé de voir que $a\sqrt{\frac{N}{E\,I}}$ est un nombre abstrait.

Connaissant f on appliquera la formule [6] du n° précédent en posant

$$R' = N\,(l+f)\,\frac{V'}{I} + \frac{N}{\Omega} \quad \ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Si les seules inconnues étaient f et R' on les déterminerait immédiatement ; mais s'il s'agissait de déterminer l'équarrissage de la pièce de manière que a, P, et l étant donné la résistance R' ne dépassât pas une limite assignée, l'inconnue serait plus difficile à dégager parce qu'elle entrerait dans l'angle $a\sqrt{\frac{N}{E\,I}}$. Dans ce cas on remarquera que cet angle est petit car le rapport $\frac{f}{l}$ égal à $\frac{1}{\cos\sqrt{\frac{P}{E}}} - 1$ est lui même petit et par conséquent le cosinus diffère peu de l'unité. Or, un petit arc pouvant être confondu avec sa corde on a sensiblement

$$(arc)^2 = 2\,(1 - cosinus)$$

d'où

$$\cos = 1 - \frac{1}{2}\,(arc)^2$$

la formule [1] peut donc être remplacée par

$$f = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\,\frac{a^2 N}{E\,I}} - 1 \right) l \quad \ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

et par suite l'équation [2] donne

$$R' = \frac{N\,\gamma'\,l}{I}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\,\frac{a^2 N}{E\,I}} + \frac{N}{\Omega} \quad \ldots\ldots [\,4\,]$$

Si la section est rectangulaire on a $\Omega = bc$, $I = \frac{1}{12}\,bc^3$ et $V' = \frac{1}{2}\,c$; si elle est circulaire $\Omega = \Pi\,r^2$, $I = \frac{\Pi\,r^2}{4}$ et $V' = r$.

Ainsi l'équation [2] devient

pour un prisme rectangulaire

$$bc^2 = \frac{N}{R'}\left(c + \frac{6\,l}{1 - \frac{6\,N\,a^2}{E\,b\,c^3}} \right)$$

pour un cylindre

$$r^2 = \frac{N}{\Pi\,R^2}\left(r + \frac{4\,l}{1 - \frac{2\,N\,a^2}{E\,\Pi\,r^4}} \right)$$

Exemple tiré de l'ouvrage cité de M. Ardant (page 105). Cylindre en sapin, $a = 15^m$ $l = 1$; $N = 5000^{Kil}$; $R' = 6 \times 10^5$; $E = 12 \times 10^8$ on trouve le diamètre $2r = 0^m,49$ et la flèche $f = 0^m,166$. Il serait plus exact de tenir compte du poids p et de la pièce en écrivant $\frac{N + pa}{\Omega}$ pour dernier terme de la formule [4] au lieu de $\frac{N}{\Omega}$, ce qui revient à négliger l'influence de $p\,a$ sur la flexion de la pièce.

156. On peut obtenir d'une manière plus simple une solution suffisamment approchée de la question précédente en négligeant la différence $f - y$ dans la première équation et posant

$$E\,I\,f''(x) = N\,l \quad \text{d'où} \qquad E\,I\,f'(x) = N\,l\,x \quad \text{puis} \qquad E\,I\,y = \frac{1}{2}\,N\,l\,x^2$$

et par conséquent la flèche $$f = \frac{1}{2}\,\frac{N\,l\,a^2}{E\,I}$$

et en substituant P et f pour N et y dans l'équation [6] du n° 154

$$R'\Omega = N\,(l+f)\,\frac{V'\Omega}{I} + N \quad \text{ou} \quad R' = \frac{N\,v'\,l}{I}\left(1 + \frac{N\,l\,a^2}{2\,E\,I}\right) + \frac{N}{\Omega}\,.$$

On aurait les mêmes résultats des équations [3] et [4] ci-dessus en remplaçant la fraction $\frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{a^2 N}{E I}}$ par $1+\frac{1}{2}\frac{a^2 N}{E I}$ qui en diffère très peu attendu que la flèche est toujours très petite par rapport à l.

157. Si l'on modifiait la question du n° 155 en ajoutant une force P parallèle à BC, l'équation relative à la flexion serait

$$E\,I\,f''(x) = P\,(a-x) + N\,(l+f-y) \quad \ldots\ldots [\,1\,]$$

équation qu'on intègre en remarquant d'une part que si l'on remplace $a - x$ par $-x'$ et $l + f - y$ par y' cette équation devient

$$E\,I\,\frac{d^2\,y'}{d\,x^2} = -\,P\,x' - N\,y'$$

et d'autre part qu'une fonction de la forme $y = A\,x + B\sin C\,x + D\cos C\,x$

donne $$\frac{d\,y}{d\,x} = A + C\,B\cos C\,x\,C\,D\sin C\,x$$

et $$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} - C^2\,B\sin C\,x - C^2\,D\cos C\,x = C^2\,A\,x - C^2\,y$$

qui devient identique à l'équation ci-dessus en y' et x' quand on pose

$$C^2\,A = \frac{P}{E\,I} \qquad \text{et} \qquad C^2 = \frac{+N}{E\,I} \qquad \text{d'où} \qquad A = -\,\frac{P}{N}$$

l'intégrale générale est donc

$$y' = -\,\frac{P}{N}\,x' + B\sin x'\sqrt{\frac{N}{E\,I}} + D\cos x'\sqrt{\frac{N}{E\,I}}$$

et les deux constantes B, D se déterminent par la condition que pour $x = 0$, on a $y = 0$ et $\frac{d\,y}{d\,x} = 0$.

Au lieu de pousser plus loin ce calcul sur lequel on peut consulter les leçons de Navier nous remarquerons que l'équation [1] se simplifierait en négligeant, comme au n° 156, la différence $f - y$; on aurait ainsi approximativement

$$E\,I\,f''(x) = P\,(a-x) + N\,l$$

dont l'intégrale $E\,I\,y = (P\,a + N\,l)\,\frac{x^2}{2} - \frac{P\,x^3}{6}$ donnerait, par $x = a$, la flèche f

$$f = \frac{1}{E\,I}\left(\frac{N\,l\,a^2}{2} + \frac{P\,a^3}{3}\right),$$

valeur qu'il faudrait substituer dans la formule suivante, conforme à l'équation [6] du n° 154

$$R' = \left(P\,a + N\,(l+f)\right)\frac{V'}{I} + \frac{N}{\Omega}$$

pour déterminer soit la résistance extrême R', soit les dimensions transversales de la pièce si cette résistance était donnée.

§: 8. *Flexion et résistance des pièces courbes.*

158. Une pièce naturellement courbe étant soumise à des forces extérieures connues, on peut se proposer deux questions 1° Déterminer le changement de figure de la pièce. 2° Déterminer la résistance extrême R' dans une section désignée. Si les intensités des forces et leurs positions relativement à cette section étaient connus, la formule [6] du n° 154 fournirait immédiatement la solution de la deuxième question. Nous allons nous occuper de la première dans le cas où les forces sont situées dans le plan de la courbe primitive de la pièce, plan supposé vertical (fig. 39). Soient aa' une section transversale quelconque et bb' une autre section infiniment voisine, dans l'état naturel. Supposons que dans l'état de flexion cette deuxième section prenne, relativement à la première, la position $b_1\,b'_1$; il en résulte que la fibre élémentaire qui avait naturellement la longueur $m\,m'$ a subi la variation $m'\,m_1$ et par conséquent la force A correspondant à cette fibre est $A = E\,d\,\omega\,\frac{m'\,m_1}{m\,m'}$.

Appelons α et $\alpha + d\,\alpha$ les angles que les sections aa', bb' font avec la verticale dans l'état de flexion ; désignons par $d\,\delta$ la longueur oo' supposée invariable : nous aurons, en faisant $om = z$,

dans l'état naturel . . . . . $m\,m' = d\,\delta - z\,d\,\alpha$

dans l'état de flexion . . . . . $m\,m_1 = d\,\delta - z\,d\,\alpha'$

donc $m'\,m_1 = z\,(d\,\alpha' - d\,\alpha)$, donc $A = E\,d\,\omega\,\frac{z\,(d\,\alpha' - d\,\alpha)}{d\,\delta - z\,d\,\alpha}$

ou en négligeant $z\,d\,\alpha$ par rapport à $d\,\delta$, vu la faible courbure de la pièce

$$A = E\,d\,\omega\,\frac{z\,(d\,\alpha' - d\,\alpha)}{d\,\delta}$$

Maintenant, en appelant v comme précédemment la distance de l'élément $d\,\omega$ à la projetante G du centre de gravité et en désignant par V la distance $0G$, on a $z = v \pm V$ et

$$\sum M\,\{A\}_G = \sum AV = \frac{E\,(d\,\alpha' - d\,\alpha)}{d\,\delta}\sum v^2\,d\,\omega$$

attendu que $V\sum v\,d\,\omega = 0$. En désignant à l'ordinaire par I le moment d'inertie de la section aa' par rapport à l'axe G cette formule devient

$$\sum M\{A\}_G = E\,I\,\frac{d\,\alpha' - d\,\alpha}{d\,\delta}\,.$$

Cela posé, désignant par F l'une des forces quelconques qui sollicitent la pièce depuis la section aa' jusqu'à son extrémité, nous aurons en prenant les moments de toutes les forces F par rapport à l'axe G

$$\frac{d\,\alpha' - d\,\alpha}{d\,\delta} = \frac{1}{E\,I}\sum M\{F\}_G\,.$$

Le 2° membre de cette équation peut être considéré comme une fonction implicite ou explicite de δ, dans laquelle les forces entrent comme des constantes ou comme des fonctions de δ. Les moments de ces forces par rapport au point G à l'extrémité de δ, devraient être pris dans l'état de flexion de la pièce ; mais comme cette flexion est très faible on peut sans erreur notable calculer les moments des forces d'après leurs positions dans l'état naturel de la pièce.

En multipliant les deux membres de l'équation par $d\,\delta$ et en intégrant on aura

$$(\alpha' - \alpha) = \frac{\int_0^{\delta} d\,\delta \sum M\{F\}_G}{E\,I}$$

l'intégrale étant prise jusqu'au point G, extrémité de l'arc quelconque δ, à partir d'une origine où la direction de la courbe est supposée la même dans l'état de la flexion que dans l'état naturel. On a ainsi la variation $\alpha' - \alpha$ de l'angle de la normale à l'extrémité de δ, avec la verticale, par suite de la flexion.

Pour passer de ce premier résultat à la détermination de la variation de la position du point G, on emploie l'artifice suivant dû à Navier, après avoir observé que l'intégrale ci-dessus peut être considérée, soit comme une fonction de δ, soit comme une fonction de x, que nous désignerons pour abréger par $F(x)$, en appelant x et y les coordonnées horizontales et verticales du point G, dans l'état naturel ; ainsi $\alpha' - \alpha = F(x)$;

l'angle $\alpha' - \alpha$ étant très petit, on peut écrire approximativement

$$\sin(\alpha' - \alpha) = \alpha' - \alpha \qquad \text{et} \qquad \cos(\alpha' - \alpha) = 1$$

Or, en considérant α' comme égal à $(\alpha' - \alpha) + \alpha$ on a

$$\cos\alpha' = \cos(\alpha' - \alpha)\cos\alpha - \sin(\alpha' - \alpha)\sin\alpha$$
$$\sin\alpha' = \sin(\alpha' - \alpha)\cos\alpha + \cos(\alpha' - \alpha)\sin\alpha$$

d'où, en substituant $\cos(\alpha' - \alpha) = 1$, $\sin(\alpha' - \alpha) = F(x)$, puis en remarquant que si l'on désigne par x', y' les coordonnées dans l'état de flexion, du même point G dont les coordonnées dans l'état naturel sont x, y, on a

$$\cos\alpha' = \frac{d\,x'}{d\,\delta} \text{ et } \sin\alpha' = \frac{d\,y'}{d} \text{ de même que } \cos\alpha = \frac{d\,x}{d\,\delta} \text{ et } \sin\alpha = \frac{d\,y}{d\,\delta}$$

on conclut

$$d\,x' - d\,x = -d\,y\,F(x) \qquad \text{et} \qquad d\,y' - d\,y = d\,x\,F(x)$$

et en intégrant

$$x' - x = -\int_0^x d\,y\,F(x) \quad \text{et} \quad y' - y = \int_0^x d\,x\,F(x)\ ;$$

ainsi les déplacements du point *G*, l'un horizontal *x′ - x*, l'autre vertical *y′ - y*, se déterminent par deux quadratures, car la courbe primitive étant donnée, *y* est une fonction de *x*, soit $y = f(x)$ et l'on a $d\,y = f'(x)\,.\,d\,x$. Cette dérivée *f′(x)* exprime la variable *tang* α .

159. Remarque et méthode approximative. La quantité $\sum M\{F\}_G$ peut n'être pas exprimable par une fonction générale de δ. Mais on pourra toujours représenter graphiquement l'intégrale $\frac{\int_0^\delta d\,\delta\,\sum M\{F\}_G}{E\,I}$ par l'aire d'une courbe, en portant pour abscisses les longueurs δ depuis l'origine de la pièce courbe jusqu'aux divers points *G*, et pour ordonnées les quotients obtenus en divisant par $E\,I$ les moments des forces, agissant au-delà des points *G* successifs, par rapport à ces mêmes points. Il sera mieux, pour la suite du calcul, de prendre pour abscisses les valeurs successives de *x* ; à cet effet, on substituera $d\,\delta = \frac{d\,x}{\cos\alpha}$ et l'on portera par conséquent en ordonnées les valeurs de

$$\frac{\sum M\{F\}_G}{E\,I\cos\alpha}$$

Les aires de cette courbe, comptés à partir de l'origine, seront les valeurs de *F(x)*. On calculera numériquement ces valeurs, puis on les représentera graphiquement par des droites que l'on portera en ordonnées aux extrémités des abscisses *x*. Il en résultera une nouvelle courbe dont l'aire pour une abscisse quelconque *x* sera la valeur correspondante de

$$\int_0^x d\,x\,F(x) \quad \text{ou de} \quad (y' - y)\,.$$

Enfin les mêmes valeurs de *F(x)* étant multipliées par les valeurs correspondantes de $\frac{d\,y}{d\,x}$ ou de *tang* α , et les produits obtenus étant encore portés ordonnées aux extrémités des abscisses *x*, il en résultera une 3e courbe dont l'aire, pour une abscisse *x*, sera la valeur correspondante de

$$\int_0^x x\,.\,tang\,\alpha\,F(x) \quad \text{ou de} \quad \int_0^x d\,y\,F(x) \quad \text{ou de} \quad (x' - x)\,.$$

si la section transversale de la pièce était constante il conviendrait de mettre le diviseur $E\,I$ hors du signe $\int$ et modifier en conséquence les indications précédentes. Dans tous les cas on voit qu'un calcul, peut-être long, mais sans difficulté, donnera le moyen de déterminer les déplacements verticaux et horizontaux des divers points d'une pièce courbe donnée soumise à des forces données.

160. La pratique de l'art de l'Ingénieur présente des cas où quelques unes des forces qui sollicitent les pièces courbes doivent être déterminées par le calcul ; par exemple, un arc qui dans l'état naturel a une longueur de corde connue est posé sur deux appuis de niveau qui rendent cette corde invariable pendant que l'arc est soumis à des charges verticales données : pour s'assurer si cette pièce résistera convenablement aux efforts, il faut préalablement calculer les réactions des appuis ; leurs composantes verticales sont immédiatement connues,

mais leurs composantes horizontales doivent se déduire de la condition de l'invariabilité de la corde ; et l'on pourra toujours y parvenir par une méthode de tâtonnement facile à trouver d'après ce qui précède.

161. *Cas particuliers.* Il peut arriver qu'une pièce courbe soumise à des forces extérieures conserve néanmoins la même figure qu'elle aurait dans l'état naturel sauf l'effet très peu sensible de l'allongement ou du raccourcissement de la fibre moyenne. Il faut et il suffit pour cela que si l'on partage la pièce en deux parties par une section quelconque, la somme algébrique des moments des forces appliquées à l'une de ces parties, par rapport au centre G de gravité de cette section, soit nulle. La résultante de ces mêmes forces, passant par le point G, est la pression ou tension dans la section considérée.

Cette considération a lieu lorsque l'arc ayant la figure d'une chaînette, supporte des charges parallèles uniformément réparties sur sa longueur, et que les points extrêmes reçoivent des forces tangentes à la courbe.

Elle est encore satisfaite lorsque l'arc ayant la figure d'une parabole dont l'axe principal est vertical, supporte des charges verticales uniformément réparties sur la projection horizontale de cet arc, et que les forces extrêmes sont tangentes à la courbe. Dans ce cas les formules relatives aux ponts suspendus (n^{os} 51 et suiv.) sont applicables, et l'équation de la courbe étant $y = ax^2$, si l'on désigne par T_x la poussée horizontale et par p la charge par unité de longueur horizontale, on a $T_x = \frac{p}{2\alpha}$. (*)

Par conséquent lorsqu'il s'agira d'un arc dont la corde horizontale sera $2c$ et dont la flèche sera h on aura $h = \alpha c^2$ d'où

$$T_x = \frac{p\, c^2}{2\, h}$$

composante horizontale de la résistance de chaque appui, tandis que sa composante verticale sera

$$T_y = p\, c$$

et par conséquent la résistance totale $\sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \frac{p\, c^2}{2\, h}\sqrt{1 + \frac{4\, h^2}{c^2}}$.

Ces résultats sont applicables aux courbes en arcs de cercle dont la flèche est petite relativement à la corde. M. Arant faisant usage de l'analyse de Navier trouve ce cas (page 120 de l'ouvrage cité) pour la poussée horizontale une formule qui revient à celle-ci

$$T_x = \frac{p\left(c^2 + h^2\right)}{2\, h}$$

et qui donne par conséquent une valeur un peu plus forte que l'expression ci-dessus, relative à la courbe parabolique.

(*) On retrouve très aisément cette formule en considérant l'équilibre d'une portion d'arc à partir du sommet où la tangente est horizontale ; les forces verticales donnent $T_y = px$ et l'équation des moments par rapport à l'origine $T_y . x = T_x\, y + \frac{1}{2}\, p\, x^2$ d'où, en éliminant T_y on conclut $y\, T_x = \frac{1}{2}\, p\, x^2$ ou $\alpha\, T_x = \frac{1}{2}\, p$.

On trouvera sur le sujet de ce paragraphe de savants et utiles développements dans les leçons de M. Navier et dans les études de M. Ardant.

§: 9. Torsion des prismes

162. Un prisme étant fixé invariablement vers l'une de ses extrémités, et sollicité à l'autre bout par diverses forces équivalentes à un couple situé dans une section transversale, l'équilibre qui s'établit exige que toute section aa' exerce sur sa voisine bb' des forces réductibles à un couple parallèle au premier et de même moment. Ces forces résultent du déplacement de l'une de ces sections par rapport à l'autre, déplacement qui consiste en un mouvement de rotation autour d'un axe intérieur du prisme.

Soit Θ l'angle de torsion de la pièce par unité de longueur ;

$d\,\omega$ aire commune de deux éléments superficiels qui dans l'état naturel seraient vis-à-vis l'un de l'autre dans les plans aa', bb' ;

r leur distance à l'axe, qui ne change point l'état de torsion.

On satisfait aux phénomènes observés en admettant que l'élément $d\,\omega$ du plan bb' est sollicité à revenir à sa position naturelle par une force perpendiculaire au rayon r et proportionnelle

1° à l'aire $d\,\omega$

2° à l'angle de torsion Θ par unité de longueur, attendu que, toutes choses égales d'ailleurs, le déplacement relatif des deux éléments considérés est proportionnel à cet angle ;

3° à la distance r, par la même raison.

Ainsi on peut exprimer cette force par . . . . . $G\,\Theta\,r\,d\,\omega$

et son moment, par rapport à l'axe du prisme par . . . . . $G\,\Theta\,r^2\,d\,\omega$ en appelant G un coefficient à déterminer par expérience suivant la substance du prisme, et dont la valeur numérique dépend des unités auxquelles sont rapportés l'angle Θ et les dimensions linéaires.

Donc en désignant par $P\,R$ le moment du couple agissant extérieurement sur le prisme on a

$$P\,R = G\,\Theta \sum r^2\,d\,\omega \quad \ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

163. Lorsque la section du prisme est un cercle ou un polygone régulier il est évident que l'axe de torsion passe par le centre de figure. On peut démontrer qu'il passe toujours par le centre de gravité. En effet les forces $G\,\Theta\,r\,,\,d\,\omega$ doivent être équivalentes à un couple, et par conséquent la somme algébrique de leurs projections sur une droite quelconque est nulle.

Soit 0 le centre en désignant pour abréger par F la force $G\,\Theta\,r\,d\,\omega$ on a

$$\sum F_x = 0 \qquad \text{et} \qquad F_x = F\,.\,\frac{y}{r}$$

donc $\sum F\,\frac{y}{r} = 0$ donc $\sum G\,\Theta\,y\,d\,\omega = 0$ ou $G\,\Theta\,y\,d\,\omega = 0$

donc ce centre de gravité est sur l'axe $0x$. Il est aussi sur $0y$, et par conséquent en 0.

164. Si l'on désigne par $T\ d\ \omega$ la force ou résistance à la torsion que l'élément $d\ \omega$ du plan aa' exerce sur le solide, on a

$$T\ d\ \omega = G\ \Theta\ r\ d\ \omega \qquad \text{d'où} \qquad \frac{T}{r} = G\ \Theta$$

rapport constant pour un état de torsion déterminé. Soit r' la plus grande distance r, T prend une valeur correspondante T' qui est la plus grande tension dans la section aa'.

Substituant $\frac{T'}{r'}$ pour $G\ \Theta$ dans la formule [1], on a

$$P\ R = \frac{T'}{r'} \sum r^2\ d\ \omega \quad \ldots\ldots\ldots [\ 2\ ]$$

165. Lorsque la section est un cercle de rayon r' on a

$$\sum r^2\ d\ \omega = \int_0^{r'} r^2\ .\ 2\ \Pi\ r\ d\ r = \frac{1}{2}\ \Pi\ r'^4 \qquad \text{d'où} \qquad P\ R = G\ \Theta\ \frac{\Pi\ r'^4}{2} = T'\ .\ \frac{1}{2}\ \Pi\ r'^3$$

Si c'est une zone comprise entre deux cercles concentriques on a

$$\sum r^2\ d\ \omega = \frac{1}{2}\ \Pi\ \left(r'^4 - r''^4\right).$$

Si c'est un rectangle dont les côtés sont b et c on a, en faisant passer par le centre deux axes $0_x, 0_y$, parallèles aux côtés

$$\sum r^2\ d\ \omega = \sum \left(x^2 + y^2\right) d\ \omega = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2\ .\ c\ d\ x + \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} y^2\ b\ d\ y = \frac{1}{12}\ b\ c\ \left(b^2 + c^2\right)$$

Cette formule, dans le cas d'un carré, se réduit à

$$\sum r^2\ d\ \omega = \frac{1}{6}\ b^4 \quad \text{d'où} \quad P\ R = G\ \Theta\ \frac{b^4}{6} = \frac{T'\ b^3}{3\sqrt{2}} = \frac{T'\ b^3}{4{,}24}$$

166. *Données expérimentales.* Il résulte des expériences de Duleau sur la torsion du fer forgé que l'on a à peu près, en prenant le mètre pour unité

Pour le fer rond	$G = 66 \times 10^8$	quand l'angle Θ est exprimé par le rapport de l'arc qui le mesure au rayon.
Pour le fer carré	$G = 55 \times 10^8$	

Pour le fer rond	$G = 115 \times 10^6$	quand l'angle Θ est exprimé en degrés sexagésimaux.
Pour le fer carré	$G = 96 \times 10^6$	

Exemple. fer rond ; diamètre 0,02 ; longueur 3,17 ; angle de torsion total 6"

$$P\ R = G\ \Theta\ .\ \frac{1}{2}\ \Pi\ r'^4 = 115 \times 10^6 \times \frac{6}{3{,}17} \times 1{,}57 \times \frac{1}{10^8} = 3{,}4\ .$$

Ainsi l'effort P à 1^{m},00 de distance de l'axe serait 3^{Kil},4 et l'arc décrit à cette distance serait $\frac{6\ \Pi}{180} = 0^{m}$,104 .

167. On peut voir dans *les leçons de Navier,* page 106, les résultats de l'expérience sur la résistance de diverses substances à la torsion.

Quant à la valeur T_1 de T' qui répond à la limite d'élasticité et qu'il importe de ne pas dépasser dans les constructions et les machines, les expériences précises manquent.

En supposant que la formule [2] subsiste jusqu'à l'instant de la rupture, on peut d'après les expériences connues déterminer la valeur extrême de T'. Navier a trouvé ainsi en posant pour les barres cylindriques (165)

$$P\ R = \frac{1}{2}\ T'\ \Pi\ r'^{3}$$

que pour la fonte de fer la valeur de T' correspondante à la rupture variait de 20 x 10^6 à 45 x 10^6 suivant la nature de la fonte.

Il semblerait donc qu'on pourrait dans la pratique porter T jusqu'à 4 x 10^6 . Mais dans les machines le rayon r' calculé d'après cette valeur serait inférieur aux dimensions usitées.

M. Morin (aide mémoire de mécanique) pose <u>pour la fonte ou le fer</u> la relation

$$P\ R = 315.000\ l^{3}$$

l étant le côté de la section carrée. On aurait d'après cela et d'après le n° 165

$$315.000 = \frac{T}{4,24} \qquad \text{d'où} \qquad T_1 = 1.340\ .000$$

Pour le bois on peut admettre que la valeur de T_1 et celle ci-dessus qui convient pour la fonte sont entr'elles dans le même rapport que les valeurs de R_1 appartenant à ces deux substances, ou à peu près comme 0,60 est à 7,50. On obtient ainsi pour le bois :

$$T_1 = 0,08 \times 1.340\ .000 = 107.000\ .$$

Chap. 4. *Du frottement et de la raideur des cordes.*

§: 1 Du frottement de glissement.

168. Lorsque deux corps se touchent de manière à empêcher ou modifier le mouvement qui aurait lieu en vertu des forces appliquées à ces corps, s'ils étaient séparés, ils se compriment mutuellement. C'est une suite de la constitution physique des corps, composés de molécules qui dans l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme sont tenus en équilibre par les forces attractives et répulsives qui les sollicitent ; ces molécules sont par conséquent prêtes à céder à toute force nouvelle qui s'introduit dans le système. Mais si un corps est dur l'étendue de sa déformation peut être fort restreinte parce qu'un très petit changement de figure met en action des forces moléculaires très grandes.

Dans la *Mécanique rationnelle* on suppose l'existence de ce corps tellement durs que la compression de contact est nulle ; et l'on en tire cette conséquence que lorsque deux de ces corps se touchent, les actions mutuelles qui se manifestent aux divers points de contact sont des forces normales aux surfaces en ces points ; surfaces supposées continues et exactement de même figure que si le contact n'existait pas.

169. Mais cette hypothèse n'est jamais justifiée par l'expérience. Si l'on pose un corps sur un autre corps fixe et qu'on l'abandonne à l'action de la pesanteur, quelque bien dressée que soient les deux faces de contact, le plan dans lequel ces deux faces paraissent se confondre peut toujours être sensiblement incliné à l'horizon, sans que le corps supérieur glisse sur l'autre pourvu que cette inclinaison ne soit trop grande ; d'où il suit que le corps inférieur exerce alors sur le supérieur des forces dont la résultante est oblique à la surface apparente de contact, car elle est verticale et fait par conséquent avec la surface apparente de contact un angle égal à celui de cette surface avec l'horizon.

On arrive à la même conséquence en observant qu'un corps pesant posé sur un autre dont la surface est plane et horizontale n'y glisse pas, quoique sollicité par une force parallèle au plan, pourvu que le rapport de celle-ci au poids du corps n'excède pas une certaine limite.

Des faits analogues ont lieu pendant le mouvement d'un corps qui glisse sur un autre. Ce corps abandonné à l'action de la pesanteur sur un plan suffisamment incliné prend une vitesse moindre que celle due à la hauteur de sa descente ; posé sur un plan horizontal et sollicité en outre de son poids par une force horizontale, il prend une accélération moindre que celle qui, eut égard à sa masse, devrait lui être imprimé par cette force : il faut donc dans les deux cas que le corps fixe exerce sur le corps mobile des réactions obliques et dont les composantes parallèles au plan fixe sont opposées au sens du mouvement.

170. En général lorsque deux corps se touchent, un des éléments de la surface de contact étant considéré, si la réaction que l'un des corps exerce sur l'autre dans cette étendue est oblique à la surface de contact, on peut la concevoir décomposée en deux forces, l'une parallèle et l'autre normale à cette surface : la composante parallèle s'appelle le frottement de

glissement, et l'autre la pression (on devrait dire la pression normale) du premier corps sur le second, dans l'étendue considérée.

171. Les lois du frottement de glissement sont entièrement expérimentales. De nombreuses observations ont fait connaître

1° que lorsque deux corps glissent l'un sur l'autre, c'est-à-dire lorsqu'un même élément superficiel de l'un d'eux passe, successivement et d'une manière continue, au contact avec différents éléments superficiels de l'autre corps, chaque corps reçoit de l'autre un frottement, c'est-à-dire une réaction tangentielle dont le sens est opposé au mouvement relatif du 1er corps sur le second ;

2° que le frottement pour chaque élément superficiel en contact est proportionnel à l'intensité de la pression normale et par conséquent indépendant de l'étendue des surfaces en contact, quand la nature des corps ne change pas, ni leur poli, ni leurs enduits.

3° que le frottement est indépendant de la vitesse relative des corps en contact, au moins dans les cas ordinaires de la pratique ;

4° que néanmoins lorsque le mouvement n'est que sur le point de naître, entre deux corps qui ont été quelques temps en contact et en repos, le frottement est ordinairement plus considérable que lorsque le mouvement est acquis, soit par translation soit par simple ébranlement.

172. Ces lois étant admises, il en résulte qu'en appelant

R la réaction oblique totale qu'un élément de la surface de contact, pris sur l'un des corps, reçoit de l'autre corps,

N la pression dans l'étendue de cet élément, c'est-à-dire la composante ou projection de R suivant la normale,

F le frottement correspondant au même élément, c'est-à-dire la composante ou projection tangentielle de R,

α l'angle de R avec N appelé angle de frottement

f un nombre appelé coefficient de frottement qui dépend de la nature et de l'état de poli ou d'onctuosité des corps en contact et qui ne prend d'ailleurs que deux valeurs suivant que le mouvement est acquis ou seulement sur le point de naître,

$$F = fN \text{ , et } F^2 + N^2 = R^2 \text{ d'où } F = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} R \text{ ;}$$

$$N = tang\ \alpha \text{ d'où } tang\ \alpha = f \text{ (*)}$$

173. Application au plan incliné. Un corps glisse sur un plan incliné parallèlement à la ligne de plus grande pente. Il est sollicité, en outre de son poids P, par une force Q située

(*) Voir pour les valeurs de f fournies par l'expérience, l'introduction à la Mécanique industrielle de M. Poncelet ou l'aide mémoire de Mécanique pratique de M. Morin.

dans un plan perpendiculaire aux horizontales du plan incliné. On demande la loi du mouvement.

Soient i l'angle aigu du plan incliné avec l'horizon, (fig. 40)

β l'angle quelconque de la force Q au-dessus de la ligne de la plus grande pente prise dans le sens ascendant,

V la vitesse, supposée dans le sens ascendant, à la fin du temps t.

Le mouvement de translation dont il s'agit est aussi celui du centre de gravité du corps glissant. En y transportant toutes les forces P, Q, N, F, ces deux dernières représentant les réactions du plan incliné, on aura une résultante unique φ qui étant parallèle à la direction du mouvement rectiligne, se projettera en vraie grandeur sur la ligne de plus grande pente, tandis que sa projection sur la normale au plan sera nulle. Ainsi, attendu que F agit de haut en bas,

$$\varphi = -P \sin i + Q \cos \beta - F$$

$$N + Q \sin \beta - P \cos i = 0$$

d'où, à cause de la relation $F = f\ N$ (172)

on tire $$\varphi = Q \cos \beta - P \sin i - f\ (P \cos i_Q \sin \beta)$$

formule aisée à retrouver à priori.

Par conséquent on a pour l'accélération $\frac{\varphi}{m}$

$$\frac{d\,v}{d\,t} = \frac{g}{P}\left(Q \cos \beta - P \sin i - f\ (P \cos i - Q \sin \beta)\right).$$

Donc si l'intensité Q et l'angle β restent les mêmes pendant le mouvement, l'accélération est constante, et le mouvement est uniformément varié suivant que la force φ est positive, négative ou nulle le mouvement supposé ascendant en vertu de la vitesse déjà acquise à l'instant considéré est accéléré, retardé ou uniforme. Elle est encore nulle si le corps est en repos mais sur le point de prendre un mouvement ascendant.

Si au contraire la vitesse acquise à l'instant considéré était descendante, il suffirait en conservant la direction ascendante pour le sens positif de φ, de changer le signe de F dans la première des équations précédentes, ce qui revient à changer celui de f dans la dernière formule ; et alors suivant que la force φ sera positive, négative ou nulle, le mouvement descendant sera retardé, accéléré, ou sur le point de naître.

Considérons les deux cas ou ce corps en repos est sur le point de se mettre en mouvement. Si le corps est sur le point de monter, on a

$$\varphi = 0 \ldots\ldots\ldots\ Q = P\,\frac{\sin i + f \cos i}{\cos \beta + f \sin i}$$

si dans ce cas la force Q est dirigée au-dessous de la parallèle au plan incliné, en appelant β' son angle de ce côté il faut qu'on ait

$$\cos \beta' - f \sin \beta' > 0 \qquad \text{ou} \qquad tang\ \beta' < \frac{1}{f} \qquad \text{ou} \qquad \beta' < 90° - \alpha\,.$$

Si le corps est sur le point de descendre on a, avec changement de signe de f, $\varphi = 0$, d'où

$$Q = P\,\frac{\sin i - f\cos i}{\cos\beta - f\sin\beta}$$

Si Q se trouve entre les deux valeurs ci-dessus, l'équilibre du corps est stable.

Si la force Q est nulle et le corps sur le point de descendre on a :

$$\sin i - f\cos i = 0 \qquad \text{ou} \qquad tang\, i = f$$

Considérons maintenant les deux cas possibles du mouvement du corps. S'il possède une vitesse initiale ascendante V_0 on a, en conservant à φ son expression précédente

$$V = V_0 + \frac{g\,\varphi}{P}\,t \qquad \text{et} \qquad x = x_0 + V_0\,t + \frac{g\,\varphi}{P}\,\frac{t^2}{2}$$

et l'on aura ainsi la vitesse et la position du corps après un temps t quelconque, pourvu que t ne soit pas assez grand pour que V devienne négative lorsque φ l'est, car ces formules supposent essentiellement le mouvement ascendant.

Si au contraire le corps possède une vitesse initiale descendante en comptant les vitesses et les x dans ce même sens, les deux équations dernières subsistent sous la même condition, mais l'expression de φ comptée dans le sens descendant, sans rien changer à la définition de l'angle β , est

$$\varphi = P\sin i - Q\cos\beta - f\,(P\cos i - Q\sin\beta)\,.$$

§: 2. *De la résistance dite frottement de roulement.*

174. Un corps terminé par une surface courbe et posé sur un plan horizontal avec lequel il est supposé n'avoir qu'un point ou une arête de contact, étant sollicité par des forces verticales, ne pourrait être en équilibre, s'il n'y avait point de déformation, à moins que la résultante de ces forces ne passât par le point ou l'arête de contact. L'expérience apprend qu'il n'en est pas ainsi. Soit, par exemple (fig. 41), un cylindre ou rouleau homogène posé sur deux madriers horizontaux laissant un intervalle dans lequel passe une ficelle qui embrassant un demi tour du rouleau porte à ses extrémités deux poids égaux $\frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{2}Q$: il faut d'un côté ou de l'autre un poids additionnel q non seulement pour que le repos soit rompu mais même pour que le rouleau se maintienne en mouvement lorsqu'on a commencé à l'ébranler. Coulomb a trouvé que pour un cylindre de bois de Gaïac de 0^m,162 de diamètre roulant sur des règles de chêne, quand les poids $\frac{1}{2}Q$ y compris le poids du rouleau formaient ensemble de 500 Kilog. le poids additionnel q devait être de 3 Kilog. pour qu'un mouvement très lent persistât après avoir été imprimé. Alors le cylindre est en équilibre sous l'action des forces $\frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{2}Q + q$, et de la résultante des réactions du corps inférieur, laquelle est par conséquent aussi verticale, égale à $Q + q$, et passant en un point A' dans la distance AA' au diamètre vertical du cylindre, étant désigné par δ , satisfait à l'équation des moments par rapport à A,

$$(Q+q)\,\delta = q\,r \;\ldots\ldots\;[\,1\,] \text{ d'où} \qquad \delta = \frac{3}{503}\,r = 0^m,00048\,.$$

Ces considérations fort simples donnent, ainsi que l'a remarqué M. Dupuit (*Essai sur le tirage des voitures . . . . 1837*) une notion claire du fait que l'on désigne communément sous le nom de frottement de seconde espèce ou de frottement de roulement et qui consiste généralement en ce que, lorsqu'un corps roule ou est sur le point de rouler sur un autre, les composantes normales des réactions de ce dernier ont une résultante qui passe à une petite distance en avant de la normale au point de contact supposé géométrique, du côté du mouvement existant ou sur le point de naître.

175. Coulomb a constaté que le rapport $\frac{q}{Q+q}$ du poids additionnel à la réaction normale ou pression est constant pour un même rayon r, et pour les mêmes substances en contact : fait analogue à l'une des lois du frottement de glissement.

Coulomb a cru reconnaître en outre que lorsque le rayon r varie, le rapport $\frac{q}{Q+q}$ varie en raison inverse de sorte qu'on aurait

$$\frac{q}{Q+q} = \frac{a}{r}$$

a étant une constante. Mais comme on a en même temps d'après l'équation [1] ci-dessus

$$\frac{q}{Q+q} = \frac{\delta}{r}$$

il s'en suivrait qu'on aurait $\delta = a$, c'est-à-dire que quelque fût le rayon r, le point A', centre de la réaction normale serait à une distance constante de la normale CA abaissée de l'axe du cylindre sur le plan fixe. Or on voit bien que cette loi ne peut être admise en général puisque δ doit toujours être plus petite que r.

M. Dupuit, dans l'ouvrage cité et dans les *annales des Ponts et Chaussés* (1842 - mai) a donné les résultats d'expériences d'où il a conclu que la distance δ , quand les substances en contact restent les mêmes, varie proportionnellement à la racine carré du rayon qu'ainsi on pourrait poser

$$\delta = a\sqrt{r} \quad \text{et} \quad \frac{q}{Q+q} = \frac{a}{\sqrt{r}}$$

D'après lui, on a

	Valeurs	
	de δ	*de* $\frac{q}{Q+q}$
Pour le bois roulant sur le bois	$0{,}0011\sqrt{r}$	$\frac{0{,}0011}{\sqrt{r}}$
Pour le fer — — sur le bois humide	$0{,}0010\sqrt{r}$	$\frac{0{,}0010}{\sqrt{r}}$
Pour le fer — — sur le fer	$0{,}0007\sqrt{r}$	$\frac{0{,}0007}{\sqrt{r}}$

Pour les roues sur les chaussées en empierrement environ	$0{,}03 \quad \sqrt{r}$	$\dfrac{0{,}03}{\sqrt{r}}$

M. Morin, après de nouvelles expériences, a contesté l'exactitude de cette loi, et soutenu que celle de Coulomb était plus approchée de la vérité dans les cas ordinaires de la pratique. Mais M. Dupuit persiste dans son opinion et des expériences contradictoires semblent seules pouvoir lever les doutes sur la question de fait dont il s'agit.

176. Supposons maintenant que le cylindre posé sur un plan horizontal (fig.42) et sollicité par des forces verticales dont la résultante Q' passe par l'axe de figure C, reçoive en outre l'action d'une force horizontale q' à une distance h du plan, force suffisante pour que l'équilibre soit sur le point d'être rompu. Alors la résultante de Q' et q', et par conséquent aussi la résultante des réactions du corps inférieur, seront obliques et passeront par un point A' en avant de A. Les auteurs cités admettent que dans ce cas, le moment $q'\,h$ de la force parallèle au plan par rapport à A ou A' est proportionnel à la pression normale Q' et a la même valeur que le moment $q\,r$ dans le cas précédent, en supposant les pressions $Q + q$ et Q' égales. Il s'ensuivrait que la distance AA' serait la même, car A' étant sur la résultante de Q' et q', en désignant AA' par δ', il faut qu'on ait

$$\delta' = \frac{q'\,h}{Q'} \qquad \text{et par conséquent} \qquad \delta' = \delta$$

à cause de l'équation [1] et de l'hypothèse qu'on vient d'énoncer.

177. Dans le second cas d'équilibre qui vient d'être considéré, il y a de la part du plan une réaction tangentielle égale à q'. Or cette réaction doit être moindre que $f\,Q'$, en désignant par f le coefficient de frottement de glissement sans quoi le corps cylindrique sortant du repos glisserait au lieu de rouler. Donc pour une valeur donnée de h suivant que la valeur de q' qui détermine le roulement, savoir

$$\frac{\delta\,Q'}{h} \quad \text{est} < \text{ou} > \quad f\,Q'$$

ou suivant que

$$h \quad \text{est} > \text{ou} < \quad \frac{\delta}{f}$$

il y a roulement ou glissement au sortir du repos. Ce dernier doit être très rare.

Soit par exemple, $\delta = 0{,}001\sqrt{r}$ et $f = 0{,}15$: il suffira, pour qu'il y ait roulement de faire $h > 0^{m},0066\sqrt{r}$.

178. <u>Applications</u> 1ère. Soit un cylindre homogène (fig. 43) dont le poids est P, roulant d'un mouvement uniforme sur un plan horizontal : il est à cet effet sollicité par une force horizontale constante Q qu'on suppose appliquée à un cordon enroulé sur un cylindre concentrique au premier. Le mouvement étant uniforme les forces extérieures qui s'exercent sur le corps roulant satisfont aux conditions d'équilibre. Ces forces sont P, Q, la réaction normale N passant par A', la réaction tangentielle F ; et l'on a

$$N = P\ ,\ F = Q\ ,\ Qh = P\,\delta\ .$$

cherchons le travail de Q employé à transporter le cylindre à une certaine distance. Soient r le rayon du cylindre, V la vitesse de l'axe C, et U la vitesse de D point d'application de Q, on a $U : V :: h : r$ d'où $U = \frac{V\,h}{r}$. Le travail de Q par seconde est donc

$$Q\,U = \frac{P\,V\,\delta}{r} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{Q\,U}{P\,V} = \frac{\delta}{r}.$$

Le PV, produit du poids P par le chemin parcouru en une seconde, est l'effet utile pendant ce temps, et l'on voit que le rapport du travail de Q à cet effet est indépendant de la position du point d'application D.

179. 2[e] <u>application</u>. Un madrier dont le poids y compris sa charge, est P, est posé sur deux rouleaux d'égal diamètre $2r$ qui s'appuient sur un plan horizontal ; on demande quelle est la force horizontale Q qui appliquée au madrier entretiendra le mouvement uniforme du système. Soit (fig. 44) l'un des rouleaux se transportant uniformément dans le sens indiqué par la flèche. Ce cylindre considéré à part, en négligeant son poids supposé très petit par rapport à P, est en équilibre sous l'effet des réactions qu'il reçoit du plan inférieur et du madrier, et qui peuvent se réduire comme il suit :

1° réaction normale N passant à une distance AA' ou δ du diamètre vertical AB.

2° réaction tangentielle F qu'on peut considérer à volonté comme passant par A ou A'.

3° réaction normale N' passant à une distance BB' ou δ en arrière de B, attendu que tel est le sens du roulement relatif sur le plan inférieur du madrier.

4° réaction tangentielle F' passant par B ou B'.

L'équilibre de ces forces exige qu'on ait $N = N'$, $F = F'$ et en pressant les moments par rapport à A'

$$N'\,(\delta + \delta') = F'\,.\,2\,r\ ;$$

on aurait un résultat analogue pour le second rouleau

$$N_1'\,(\delta + \delta') = F_1'\,.\,2\,r$$

Maintenant le madrier est soumis d'une part à la force horizontale Q et aux forces verticales descendantes dont la somme est P, d'autre part à des actions égales et opposées aux forces verticales N', N_1', et aux forces horizontales F', F_1'. On a donc

$$P = N' + N_1' \qquad \text{et} \qquad Q = F' + F_1'$$

or, en ajoutant les deux équations précédentes, il vaut

$$(N' + N_1')\,(\delta + \delta') = (F' + F_1')\,2\,r$$

donc . . . . . $P\,(\delta + \delta') = 2\,r\,.\,Q$

Exemple $\delta = 0{,}03\,\sqrt{r}$, $\delta' = 0{,}001\,\sqrt{r}$ $Q = \frac{0{,}031}{2\sqrt{r}}\,P$.

si . . . . . $r = 0{,}25$, $Q = 0{,}031\,P$.

Remarque. La vitesse du madrier est évidemment double de celle de l'axe C' du rouleau.

180. 3[e] <u>application</u>. Un corps terminé par une surface cylindrique et ayant son centre de gravité dans l'axe de figure C (fig. 45) roule sur un plan. Il est sollicité, indépendamment des

réactions de ce plan, par diverses forces dont la résultante passe par l'axe C ; lui est perpendiculaire et peut être remplacée par deux forces l'une P normale l'autre T parallèle au plan. On demande la loi du mouvement rectiligne de l'axe C, et les intensités des réactions du plan.

Outre les forces P et T le cylindre reçoit du plan une réaction tangentielle F inconnue, plus une réaction normale N passant par A' et dont l'intensité est égale à P, attendu que le centre de gravité C se meut parallèlement au plan (38).

Appliquons au cylindre le théorème de l'effet de travail (39).

Soit v la vitesse de l'axe C, à un instant quelconque. Les vitesses des différents points du corps sont les mêmes que s'il tournait autour de l'axe A. Soit ω la vitesse angulaire de ce mouvement de rotation. La puissance vive du système à l'instant considéré est

$$\frac{1}{2}\omega^2 \sum m\, r^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\frac{v^2}{R^2}\left(M\, R^2 + \sum m\, r_1^2\right)$$

en appelant $\sum m\, r^2$ le moment d'inertie par rapport à l'axe A, M la masse du système, R le rayon AC, $\sum m\, r_1^2$ le moment d'inertie par rapport à l'axe C passant par le centre de gravité.

Donc l'accroissement de la puissance vive entre deux instants où la vitesse de C est d'abord v_0 puis v, est

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right)\left(M + \frac{\sum m\, r^2}{R^2}\right).$$

Maintenant, dans ce même intervalle, le travail de T est T_x, en désignant par x le chemin rectiligne parcouru par C' parallèlement au plan. Le travail de P est nul. Si enfin on désigne par ζ_f le travail résultant du contact du cylindre et du plan on a

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right)\left(M + \frac{\sum m\, r^2}{R^2}\right) = T_x - \varsigma_f .$$

D'après les expériences connues le travail ζ_f ne parait pas dépendre de l'intensité de la vitesse, mais seulement de la pression P et du rayon R. Supposons que sans changer ces dernières quantité on réduise T à la valeur T' nécessaire pour entretenir le mouvement uniforme ; on aurait

$$T'\, x - \varsigma_f = 0 \qquad \text{et en même temps} \qquad T'\, R = P\, \delta$$

d'où l'on conclut

$$\varsigma_f = \frac{P\,\delta}{R}\, x$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right)\left(M + \frac{\sum m\, r_1^2}{R^2}\right) = \left(T - P\,\frac{\delta}{R}\right) x \quad \ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

Ainsi le mouvement de l'axe C est uniformément varié.

Il reste à déterminer l'intensité de F, et on la trouve au moyen du théorème du mouvement du centre de gravité. La force F étant supposée transportée en C ainsi que toute la masse du corps on a, en appliquant à ce point matériel fictif le théorème de l'effet du travail

$$\frac{1}{2} M \left(v^2 - v_0^2 \right) = \left(T - F \right) x .$$

De cette équation on tire

$$F = \frac{T \sum m r_1^2 + P M R \delta}{\sum m r_1^2 + M R^2} \quad \ldots\ldots\ldots [2]$$

Exemple. S'il s'agissait d'un cylindre homogène abandonné à l'action de la pesanteur, sur un plan incliné faisant avec l'horizon l'angle i, on aurait

$$T = M g \sin i , \qquad P = M g \cos i , \qquad \sum m r_1^2 = \frac{1}{2} M R^2 .$$

L'équation [1] deviendrait

$$v^2 - v_0^2 = \frac{4}{3} g x \left(\sin i - \frac{\delta}{R} \cos i \right) \quad \ldots\ldots\ldots [3]$$

tandis que si l'on admettait l'hypothèse d'un corps glissant sans frottement sur le même plan incliné on aurait

$$v^2 - v_0^2 = 2 g x \sin i .$$

L'équation [2], par la même substitution devient

$$F = \frac{1}{3} M g \left(\sin i + 2 \cos i \frac{\delta}{R} \right) .$$

D'ailleurs la force F ne peut pas dépasser une certaine limite, puisque le cylindre ne glisse pas sur le plan. On a donc

$$F < f N \qquad \text{ou} \qquad F < f M g \cos i$$

$$\text{donc} \qquad \frac{1}{3} M g \left(\sin i + 2 \frac{\delta}{R} \cos i \right) < f M g \cos i$$

$$\text{ou} \qquad tang\, i < 3 f - 2 \frac{\delta}{R} .$$

Donc si l'inclinaison i est triple de l'angle de frottement il y a glissement et l'équation [1] n'est plus applicable.

M. Dupuit dans son essai est arrivé d'une autre manière aux mêmes formules.

181. *Cas particulier.* Cylindre homogène qui roule en remontant sous l'action de la pesanteur et des réactions du plan incliné.

La formule [3] subsiste en changeant le signe de x. Si l'on suppose pour plus de simplicité que $\frac{\delta}{R}$ puisse être négligé auprès de $sin\, i$ et que la vitesse finale v soit nulle on a la hauteur de l'ascension

$$x \sin i = \frac{3}{2} \frac{v_0^2}{2 g} .$$

Ce qui tient à ce que la puissance vive du cylindre à l'instant initial est $\frac{3}{2} . \frac{1}{2} M v_0^2$.

On remarquera que dans ce cas la force F composante tangentielle de la réaction du plan, et cause nécessaire du ralentissement du mouvement de rotation, agit dans le sens ascendant parce que le cylindre tend à glisser dans le sens de la descente pendant que son axe monte.

182. Dans un grand nombre de questions de mécanique usuelle le frottement de roulement peut être négligé. Tel est le cas d'un levier, ou d'un fléau de balance qui repose sur son appui par un couteau et non par un tourillon.

§: 3. *Presse à coin.*

183. Dans l'appareil représenté par la figure 46 on demande la relation entre la force P exercée sur la tête du coin et la pression Q que reçoit la matière à presser.

Le coin à l'instant où il est sur le point de descendre, est soumis aux cinq forces P, N, N', fN, fN', et si on le suppose isocèle, on a

$$[\,1\,] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad P = 2\,N\,(\cos\alpha + f\,\sin\alpha)$$

Le bloc interposé entre le coin et la matière à presser est soumis, en négligeant son poids, à cinq forces N_1, fN_1, N'', fN'', Q, dont les deux premières sont égales et opposées à N et à fN, en vertu du principe de l'égalité entre l'action et la réaction.

L'équilibre de ce bloc donne deux équations dont les termes ne dépendent que des intensités et de la direction des forces, quels que soient leurs points d'application inconnus :

$$N\sin\alpha - f\,N\cos\alpha - f\,N'' - Q = 0$$
$$N\cos\alpha + f\,N\sin\alpha - N'' = 0$$

d'où en éliminant N''

$$[\,2\,] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad N\left(\sin\alpha - 2\,f\,\cos\alpha - f^2\sin\alpha\right) = Q$$

de [1] et [2] on tire

$$[\,3\,] \ldots \quad P = \frac{2\,(\cos\alpha + f\,\sin\alpha)}{\sin\alpha - 2\,f\,\cos\alpha - f^2\sin\alpha}\,Q = \frac{2\,(1 + f\,tang\,\alpha)}{tang\,\alpha - 2\,f - f^2\,tang\,\alpha}\,Q$$

Exemple. $tang\,\alpha = 20\,; \quad f = 0{,}10\,; \quad \frac{P}{Q} = 0{,}306\,; \quad \frac{Q}{P} = 3{,}27\,;$

tandis que si le frottement était nul on aurait $\frac{P}{Q} = 0{,}1$. La limite de petitesse du rapport $\frac{P}{Q}$ répond à $tang\,\alpha = \infty$ ce qu'on voit en mettant l'équation [3] sous la forme

$$\frac{P}{Q} = \frac{2\left(f + \frac{1}{tang\,\alpha}\right)}{1 - f^2\,\frac{2\,f}{tang\,\alpha}}$$

elle est donc $\frac{2\,f}{1-f^2}$; tandis que si l'on négligeait le frottement, $\frac{P}{Q}$ approcherait indéfiniment de zéro.

184. L'équilibre étant établi comme précédemment entre les forces P, Q et les frottements, supposons qu'une force additionnelle ait imprimé un mouvement au système et cesse ensuite en l'abandonnant aux forces P et Q ; dans le cas où ces forces resteraient alors constantes, le mouvement serait uniforme, et l'on peut se proposer de comparer dans cette hypothèse le travail de P à celui de Q.

Si l'on désigne par x (fig. 47) le chemin vertical que décrit la tête du coin et par ς le chemin horizontal que parcourt en même temps le bloc mobile de la presse, P_x est le travail de P et $Q\varsigma$ celui de la pression appliquée à la matière comprimée.

Or on a

$$[\,4\,] \ldots\ldots \quad x = \frac{1}{2}\varsigma \, tang\, \alpha$$

et en multipliant [3] et [4] on obtient

$$P\,x = \frac{tang\,\alpha + f\,tang^2\,\alpha}{tang\,\alpha + 2\,f - f^2\,tang\,\alpha}\,Q\varsigma$$

ou

$$P\,x = \left(1 + \frac{f\left(tang^2\,\alpha + 2 + f\,tang\,\alpha\right)}{tang\,\alpha - 2\,f - f^2\,tang\,\alpha}\right)Q\varsigma$$

On aurait pu conclure cette relation immédiatement de l'équation [3] en remarquant que le rapport des chemins x , ς est tel que $P\,x$ et $Q\varsigma$ deviennent égaux quand f devient nul.

Le travail $Q\varsigma$ est l'effet utile et se trouve bien inférieur au travail moteur $P\,x$. La perte est plus considérable encore lorsque la force P est produite par un choc ; la déformation des pièces de l'appareil, celle des appuis, et leur ébranlement occasionnent des travaux résistants, et une consommation de puissance, au préjudice du travail utile. On diminue ces pertes, pour une égale dépense de travail, lorsqu'on diminue la hauteur h de chute du corps choquant, en augmentant sa masse de manière que le produit mh reste le même.

§: 4. Du treuil.

185. Le poids du treuil (fig. 48) est Π ; deux forces P et Q le sollicitent en outre dans des plans perpendiculaires à l'axe. Le mouvement est sur le point de naître, et l'on suppose que ce soit dans le sens déterminé par la force Q, dont le travail serait positif et qui est par conséquent <u>force mouvante</u>. Il s'agit de déterminer Q, connaissant Π , P, les dimensions du travail, les directions de P et de Q.

On peut sans changer les conditions d'équilibre, remplacer chacune des forces Π , Q, P par deux autres forces parallèles agissant dans des plans toujours perpendiculaires à l'axe, mais passant par les coussinets A' et A''.

Les forces Π' et P' étant connues, pourront être composées en une seule S' (fig. 49).

Au point de contact B' du tourillon et du coussinet, a lieu une réaction dont les composantes, l'une normale et l'autre tangentielle, sont N' et $f N'$.

Ainsi dans le plan du coussinet A' agiront les quatre forces $Q', S', N', f N'$; et dans le plan du coussinet A'' agiront les quatre forces analogues $Q'', S'', N'', f N''$.

Pour chacun de ces deux systèmes de forces en particulier, la résultante de translation doit être séparément nulle ; car dans le cas contraire le treuil soumis à deux ou trois forces agissant dans des plans parallèles ne pourraient demeurer en équilibre. Si l'on nomme R' la résultante des forces Q' et S', elle devra donc être égale et opposée à la résultante des forces N' et $f N'$; et comme ces dernières sont rectangulaires entr'elles, on devra avoir

$$R'^2 = N'^2 + f^2 N'^2$$

d'où $f N' = \frac{f R'}{\sqrt{1+f^2}} = f_1 R'$, en remplaçant, pour abréger, $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ par f_1 qui d'ailleurs diffère très peu de f.

De même, si R'' est la résultante des deux forces Q'' et S'', on aura

$$f N'' = \frac{f R''}{\sqrt{1+f^2}} = f_1 R''$$

Les valeurs de R' et de R'' sont d'ailleurs

$$R' = \sqrt{Q'^2 + S'^2 + 2 Q S' \cos(Q', S')} \quad \ldots\ldots\ldots [1]$$

$$R'' = \sqrt{Q''^2 + S''^2 + 2 Q'' S'' \cos(Q'', S'')} \quad \ldots\ldots\ldots [2]$$

Maintenant, le treuil étant en équilibre sous l'action des forces Π, $P, Q, N', N'', f N', f N''$, on a, en prenant les moments par rapport à l'axe de rotation

$$Q q = P p + f N' r' + f N'' r''$$

ou

$$Q q = P p + f_1 R' r' + f_1 R'' r'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [3]$$

(q, p, r' et r'' désignant le rayon de la roue, de l'arbre et des deux tourillons)

Le problème se trouve ainsi mis en équation, car les forces Q' et Q'', qui entrent dans les valeurs de R' et de R'', et par suite dans celles $f_1 R'$ et de $f_1 R''$, ont avec la force Q, des rapports déterminés et dépendants uniquement des distances du plan de la roue aux plans des coussinets.

En supposant que les forces Q et P conservent leurs directions pendant le mouvement du treuil, on aura le travail de Q pour chaque tour entier du treuil en multipliant $Q q$ par 2Π. Savoir

$$Q \cdot 2 \Pi q = P \cdot 2 \Pi p + f_1 R' 2 \Pi r' + f_1 R'' \cdot 2 \Pi r''$$

$P \cdot 2 \Pi p$ est l'effet dynamique ; le reste du second membre est le travail consommé par le frottement.

186. *1^er^ exemple.* Les forces P et Q sont verticales (fig. 50) et en désignant par H et K les points où les plans perpendiculaires à l'axe passant par les forces P et Q rencontrent cet axe. Si l'on pose

$$A'A'' = a, \quad A'H = m' a, \quad A'G = l' a, \quad A'K = n' a.$$

$$A''H = m'' a, \quad A''G = l'' a, \quad A''K = n'' a.$$

il en résulte

$$P' = m'' P\,, \qquad \Pi = l'' \Pi\,, \qquad Q' = n'' Q$$
$$P'' = m' P\,, \qquad \Pi'' = l' \Pi\,, \qquad Q'' = n' Q$$

puis $R' = m'' p + l'' \Pi + n'' Q\,; \qquad R'' = m' P + l' \Pi + n' Q$

et l'équation [3] qui sert à déterminer Q, est alors du premier degré.

En remarquant que $m' + m'' = l' + l'' = n' + n'' = 1$, on trouve, dans le cas particulier où $r' = r''$,

$$Q = \frac{P\,p + f_1 (P + \Pi)\,.\,r'}{q - f_1 r'}$$

formule indépendante de la distance a et de ses subdivisions aux points H, G, K.

187. *2e exemple*. Les forces P et Q sont encore verticales, mais l'une d'elles, P, agit au-delà du tourillon A'. (fig. 51) ;

soient toujours $A'A'' = a$

$$A' H = m' a\,, \qquad A' G = l' a\,, \qquad A' K = n' a$$
$$A'' H = m'' a\,, \qquad A'' G = l'' a\,, \qquad A'' K = n'' a$$

On en déduit comme plus haut

$$P' = m'' P\,, \qquad \Pi = l'' \Pi\,, \qquad Q' = n'' Q$$
$$P'' = m' P\,, \qquad \Pi = l' \Pi\,, \qquad Q'' = n' Q$$

puis $R' = m'' P + l'' \Pi + n'' Q$

$$R'' = - m' P + l' \Pi + n' Q$$

et $Q\,q = P\,p + f_1 R'\,.\,r' = f_1 R''\,r''$

Les termes $f_1 R'\,.\,r'$ et $f_1 R''\,.\,r''$ devant être essentiellement positifs, puisque le frottement des tourillons s'exerce toujours en sens contraire du mouvement du treuil, soit qu'ils touchent la partie inférieure ou la partie supérieure du coussinet, on ne devra prendre que la valeur absolue de R''

Dans les cas ordinaires ou Qq diffère peu de Pp, et où par conséquent $\frac{P\,p}{q}$ est une valeur approchée de Q, on peut s'assurer à l'avance s'il faut prendre

$$R'' = - m' P + l' \Pi + n' Q \qquad \text{ou} \qquad R'' = m' P - l' \Pi - n' Q$$

dans tous les cas on pourra s'assurer après le calcul de Q si l'on est pas parti d'une fausse hypothèse.

188. *3e exemple.* La force P est verticale comme Π, mais la force Q est horizontale ; toutes ces forces agissent entre les plans passant par A' et A''. Dans ce cas, on a

$$S' = P' + \Pi'\,, \qquad S'' = P'' + \Pi''\,, \qquad R' = \sqrt{S'^2 + n''^2 Q^2}\,, \qquad R'' = \sqrt{S''^2 + n'^2 Q^2}$$
$$Q\,q = P\,p + f_1 r' R' + f_1 r'' R''\,.$$

R' et R'' sont des fonctions des forces S' et S'' connues, et de l'inconnue Q. L'élimination de R' et R'' conduirait à une équation en Q du 4e degré. Il vaut mieux dans les cas d'application numériques procéder par tâtonnement à la détermination de Q. On remarque que vu la

petitesse du coefficient f_1 et des rayons r', r'' comparés à q et p, le produit Qq n'est qu'un peu supérieur à Pp, d'où l'on conclut une valeur approximative de Q en un nombre dont il suffira de prendre les deux premiers chiffres significatifs. Substituant cette quantité dans les expressions de R' et R'', on obtient numériquement leurs valeurs approximatives et en les transportant dans la dernière formule ci-dessus on a, avec une approximation généralement suffisante, la valeur de Q. Si cependant celle-ci différait notablement de la première hypothèse, on pourrait la reporter dans les formules de R' et de R'' et par suite arriver à une évaluation plus exacte de Q.

Il peut se faire qu'on ait besoin d'une expression algébrique de Q ne renfermant plus les résultats auxiliaires R', R''. On y parvient simplement à l'aide d'une formule approximative due à M. Poncelet ainsi que nous allons l'expliquer.

189. Supposons qu'on veuille remplacer approximativement le radical $\sqrt{x^2+y^2}$ par le binôme $\alpha x+\beta y$; on pourrait choisir α et β de manière que pour deux valeurs désignées de $\frac{x}{y}$ il y ait égalité entre ces deux expressions. Mais pour toute autre hypothèse il y aura une différence, et le rapport de cette différence à la vraie valeur $\sqrt{x^2+y^2}$ sera <u>l'erreur relative</u>.

Représentons la par z.

Nous aurons $$z=\frac{\alpha x+\beta y-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-1 \qquad \text{ou} \qquad z=\frac{\alpha n+\beta}{\sqrt{n^2+1}}-1$$

en désignant $\frac{x}{y}$ par la variable n.

Supposons qu'on sache que le rapport n ne peut varier qu'entre le nombre K et l'infini. (si par exemple on sait que x est $> y$, il en résulte $K=1$)

Il s'agit de déterminer α et β de manière que, entre $n=K$ et $n=\infty$, la plus grande valeur absolue de z soit un minimum par rapport aux diverses valeurs qu'on pourrait choisir pour α et β.

pour $n=K$ on a $$z'=\frac{\alpha K+\beta}{\sqrt{K^2+1}}-1$$

et pour $n=\infty$ $$z''=\alpha-1$$

Entre ces deux valeurs, z considéré comme fonction de n est susceptible d'un maximum qu'on déterminera par la différentiation. On trouve

$$\frac{dz}{dn}=\frac{\alpha-\beta n}{(n^2+1)\frac{3}{2}}$$

d'où l'on conclut 1° que $\frac{dz}{dn}$ diminue à mesure que n augmente, 2° que le maximum de z répond à $n=\frac{\alpha}{\beta}$.

Le maximum est . . . . . $z'''=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-1$

Cela posé, M. Poncelet remarque qu'on pourrait déterminer α et β de manière que les erreurs extrêmes z' et z'' fussent nulles, ce qui donnerait

$$\alpha = 1 \qquad \beta = \sqrt{K^2 + 1} - 1$$

mais qu'il vaut mieux en diminuant α et β rendre z' et z'' négatives et par là rendre le maximum z''' plus petit. C'est ce qui le conduit à, pour la double condition

$$Z''' = -z' \qquad \text{et} \qquad z''' = -z''$$

qui assure que dans tous les cas de valeur numérique de l'erreur positive ou négative n'excédera pas z''' ou $\alpha - 1$.

On a donc deux équations pour calculer α et β quand on se donne K, savoir

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2 - \frac{\alpha K + \beta}{\sqrt{K^2 + 1}} = 2 - \alpha$$

Pour $K = 0$ on a $\alpha = \beta = 0{,}83$ et $z''' = 0{,}17$ ou $\frac{1}{6}$.

Pour $K = 1$ on trouve $\alpha = 0{,}96$, $\beta = 0{,}40$ et $z''' = 0{,}04$ ou $\frac{1}{25}$.

Ainsi lorsqu'on sait d'avance que x ne peut être plus petit que y on peut poser approximativement

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}96\, x + 0{,}40\, y$$

et être assuré que l'erreur n'excédera pas $\frac{1}{25}$ de la valeur exacte. (*)

(*) On trouve dans les leçons lithographiées de M. Poncelet à l'école d'application de Metz un tableau des valeurs de α et β et de la limite d'erreur $1 - \alpha$, calculées pour les valeurs de K de 0 à 10.
On peut retrouver de la manière suivante les formules qu'il a donné pour faciliter ces calculs.
Soit ϵ la limite d'erreur correspondant à K. On a les trois équations

$$\epsilon = 1 - \alpha \qquad \epsilon = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 1 \qquad \epsilon = 1 - \frac{\alpha K + \beta}{\sqrt{1 + K^2}}$$

Les deux premières donnent $\alpha = 1 - \epsilon$ et $\beta = 2\sqrt{2}$ et la 3e devient par substitution

$$1 - \epsilon = \frac{(1 - \epsilon) K + 2\sqrt{2}}{\sqrt{1 + K^2}} \quad \text{ou} \quad K + \frac{2\sqrt{2}}{1 - \epsilon} = \sqrt{K^2 + 1}$$

Soit pour abréger $\frac{2\sqrt{2}}{1 - \epsilon} = \epsilon'$; il en résulte

$$K + \epsilon' = \sqrt{K^2 + 1} \quad \text{d'où} \quad 2\epsilon' K + \epsilon'^2 = 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{K} = \frac{2\epsilon'}{1 - \epsilon'^2}$$

Les expressions $\frac{2\sqrt{2}}{1 - \epsilon}$ et $\frac{2\epsilon'}{\sqrt{1 - \epsilon'^2}}$ conduisent à penser

$$\epsilon = tang^2 \varphi \quad \text{d'où} \quad \epsilon' = tang\, 2\varphi \quad \text{et} \quad \frac{1}{K} = tang\, 4\varphi$$

en même temps que $\alpha = 1 - tang^2 \varphi$ et $\beta = 2\, tang\, \varphi$.
D'après cela, étant donné K on en conclura l'angle de φ puis les valeurs de ϵ , de α et de β.
Voici le tableau calculé à Metz par M. Gosselin

Valeurs de K	α	β	$1 - \alpha = \epsilon$ limite de l'erreur	Valeurs de K	α	β	$1 - \alpha = \epsilon$ limite de l'erreur
0	0.8281	0.8284	1/6	6	0.9983	0.0826	1/589
1	0.9605	0.3978	1/25	7	0.9987	0.0710	1/800
2	0.9859	0.2327	1/71	8	0.9991	0.0622	1/1089
3	0.9935	0.1612	1/154	9	0.9993	0.0554	1/1428
4	0.9962	0.1226	1/266	10	0.99935	0.0498	1/1538
5	0.9976	0.0988	1/417				

190. Appliquons ce théorème à l'exemple du n° 188. Si l'on est assuré que S' et S'' excédent $n'' Q$ et $n' Q$ on aura à moins de $\frac{1}{25}$ près

$$R' = 0{,}96\ S' + 0{,}40\ n'' Q \qquad \text{et} \qquad R'' = 0{,}96\ S'' + 0{,}40\ n' Q\ ;$$

puis en substituant dans l'expression de Qq et résolvant

$$Q = \frac{P\ p + 0{,}96\ f_1 (r' S' + r'' S'')}{q - 0{,}40\ f_1 (r' n'' + r'' n')}\ .$$

191. Il peut arriver que le treuil soit sollicité par une force F agissant dans la direction de l'axe ; il naît alors une réaction égale et contraire, soit contre l'extrémité d'un des tourillons, soit contre son épaulement. Dans l'un et l'autre cas il faut ajouter au second membre de l'équation [3] du n° 185 le moment des frottements qui se produisent.

Dans le premier cas, soit A l'axe du cercle qui termine le tourillon ; admettons comme suffisamment approximatif que la pression F soit répartie uniformément sur cette surface ; $\frac{F}{A}$ sera la pression sur l'unité de surface. Si a désigne un élément superficiel du cercle, et x sa distance du centre, $\frac{F}{A}.a$ sera la pression supportée par cet élément, $f\frac{F}{A}.a$ sera le frottement correspondant, et $f\frac{F}{A}.a\,x$ le moment de ce frottement. La quantité à introduire dans le second membre de l'équation [3] du n°185 sera donc $\sum f\frac{F}{A}a\,x$ ou $f\frac{F}{A}\sum a\,x$; cette somme s'étendant à tous les éléments du cercle, dont nous désignerons le rayon par ζ.

La partie de $\sum a\,x$ qui conviendrait à une zone annulaire dans la largeur serait $d\,x$, se réduirait à $2\,\Pi\,x^2\,d\,x$.

Donc la somme entière est

$$\int_0^{\zeta} 2\,\Pi\,x^2\,d\,x \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{3}\,\Pi\,\zeta^3 \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{3}\,A\,\zeta$$

par suite $f\frac{F}{A}\sum a\,x$ devient $f\,F\frac{2}{3}\zeta$ et l'équation des moments est

$$Q\,q = P\,p + f\,N'\,r' + f\,N''\,r'' + f\,F\,\frac{2}{3}\zeta\ .$$

On voit qu'il faut diminuer ζ autant que possible, ce qu'on obtient de plusieurs manières (fig. 52 et 53) ; mais il y a une limite au-delà de laquelle la pression $\frac{F}{A}$ par unité de superficie devenant trop considérable, les matières en contact courraient le risque de s'altérer.

192. Si la pression F, ou plutôt la réaction qui lui est égale et contraire, appuie contre l'épaulement, $\frac{F}{A}$ sera encore la pression par unité de superficie. Soient ζ et ζ' les rayons des circonférences l'une intérieure et l'autre extérieure de la couronne. On aura évidemment le moment des frottements, en les calculant comme ci-dessus pour le rayon ζ', puis pour le rayon ζ, et en retranchant le premier résultat du second, on trouve

$$\frac{2}{3}\,\frac{f\,F\,\Pi\,(\zeta^3 - \zeta'^3)}{A}$$

Mais $A = \Pi\,\zeta^2 - \Pi\,\zeta'^3$; le moment des frottements devient donc

$$\frac{2}{3}\,\frac{f\,F\,\Pi\,(\zeta^3-\zeta'^3)}{\Pi\,(\zeta^2-\zeta'^3)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{3}\,\frac{f\,F\,(\zeta^2+\zeta\,\zeta'+\zeta'^2)}{\zeta+\zeta'}$$

Si l'on appelle ζ, le rayon moyen, et l la largeur de la couronne, on a

$$\zeta+\zeta'=2\,\zeta \qquad \text{et} \qquad \zeta-\zeta'=l\ ;$$

d'après la valeur de ζ et ζ' tirées de ces relations l'expression ci-dessus devient

$$f\,F\left(\zeta_1+\frac{1}{12}\,\frac{l^2}{\zeta_1}\right)$$

Si outre les forces $\Pi\,P\,Q$ du n°185 il y a une force F (fig. 55) parallèle à l'axe, et à la distance d de cet axe, on peut, sans changer les réactions des appuis, introduire deux forces F_1 et F_2 égales entre elles et à la force F, et agissant en sens contraire dans la direction de l'axe ; puis remplacer le couple $F_1\,F_2$ par un couple équivalent F', F'', situé dans le même plan. Les forces F' et F'' devront, pour l'équivalence des couples, satisfaire à la relation

$$F'\,.\,\overline{A'\,A''}=F\,d\,.$$

On a alors trois systèmes de forces, savoir

1° dans le plan perpendiculaire à l'axe, en A' Π', P', Q', F', N', $f\,N'$; plus les frottements à l'extrémité du tourillon ou sur l'épaulement

2° dans le plan perpendiculaire à l'axe, en A'' Π'', P'', Q'', F'', N'', $f\,N''$;

3° dans l'axe F_1, égal à F, et une réaction égale et contraire.

La résultante de ce dernier système étant nulle, il faut, comme au n° 105, que la résultante de translation de chacun des deux autres systèmes, soit nulle séparément, et indépendamment du frottement sur l'extrémité ou sur l'épaulement, qui se réduisent à un couple ;

En appelant S' et S'' les résultantes de translation des forces Π', P', F' d'une part et Π'', P'', F'' de l'autre part, on obtiendra deux équations pareilles à celles [1] et [2] du n° 185. Puis suivant que la translation du treuil dans le sens de son axe sera empêchée par un plan s'appuyant contre l'extrémité du tourillon ou contre son épaulement, on aura

$$\left.\begin{aligned} &Q\,q=P\,p+f_1\,r'\sqrt{R'^2}+f_1\,r''\sqrt{R''^2}+\frac{2}{3}\,f\,\zeta\,F \\ \text{ou}\qquad &Q\,q=P\,p+f_1\,r'\sqrt{R'^2}+f_1\,r''\sqrt{R''^2}+f\,F\left(\zeta_1+\frac{1}{12}\,\frac{l^2}{\zeta_1}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ [\,3\,]$$

Les équations [1], [2], [3] donnent le moyen de déterminer l'intensité de Q quand on connaît sa direction. Au lieu de procéder par élimination, il sera plus commode de prendre d'abord pour Q la valeur approchée $\frac{P\,p}{q}$ résultant de l'hypothèse où le frottement serait nul, de substituer cette valeur ou un nombre un peu supérieur dans [1] et [2] ; on en conclura des valeurs approchées de $\sqrt{R'^2}$ et de $\sqrt{R''^2}$, qui, introduites dans [3] donneront une valeur suffisamment approchée de Q. Si l'on voulait une approximation plus grande, on reporterait

cette dernière dans [1] et [2] ; les valeurs de $\sqrt{R'^2}$ et de $\sqrt{R''^2}$ qu'on en tirerait, substituées dans [3] donneraient une valeur de Q très peu différente de la précédente et de la véritable.

On pourra aussi faire usage du théorème de M. Poncelet (189) ; à cet effet on remplace toutes les forces P', F', Q', etc., par leurs composantes horizontales et verticales ; dès lors les résultantes R', R'' exactement de la forme $\sqrt{x'^2+y'^2}$, $\sqrt{x''^2+y''^2}$ se réduiront approximativement à $\alpha x'+\beta y'$ et à $\alpha x''+\beta y''$; et l'équation [3] se réduira définitivement au 1er degré en Q.

194.(*) La direction de Q étant toujours donnée, on peut avoir à déterminer son intensité pour le cas où le mouvement aurait lieu dans le sens contraire à celui de cette force, P étant alors force mouvante, et Q force résistante. Désignons par Q_1 la valeur de Q pour ce cas, par R'_1 et R''_1 les valeurs correspondantes de R' et R'' ; les équations [1], [3], [4] subsisterons en y changeant Q, R', R'' en Q_1, R'_1, R''_1 ; mais au lieu de l'équation [3] on aura

$$\left.\begin{aligned} Q_1 q &= P\ p - f_1 r'\sqrt{R'^2_1} - f_1 r''.\sqrt{R''^2_1} - \frac{2}{3} f \zeta F \\ \text{ou}\qquad Q_1 q &= P\ p - f_1 r'\sqrt{R'^2_1} - f_1 r''\sqrt{R''^2_1} - f F\left(\zeta_1 + \frac{1}{2.}\frac{l^2}{\zeta_1}\right) \end{aligned}\right\} \text{. . [3 bis]}$$

dans les cas ordinaires, où les quantité f, r', r'' sont petites. R' et R'' diffèrent peu de R'_1 et R''_1 et l'on peu, en retranchant [3 bis] de [3], écrire

$$\frac{1}{2}\left(Q - Q_1\right) q = \underline{\text{ le moment du frottement}}$$

De là un moyen de déterminer ce moment par expérience : il suffit de constater la moindre force Q nécessaire, avec un bras de levier q, pour faire tourner le treuil dans un sens, et la moindre force Q_1 nécessaire pour l'empêcher de tourner dans le sens contraire, puis de faire le produit $\frac{1}{2}(Q - Q_1)\, q$.

192. Si l'on suppose le treuil animé d'un mouvement uniforme, les relations établies ci-dessus subsisterons encore. En appelant ω la vitesse angulaire de l'arc parcouru dans l'unité de temps par chaque point de la circonférence qui a pour rayon p sera $p\,\omega$; le travail de la force mouvante et celui de la résistance pendant l'unité de temps auront donc pour expression $Q\,.\,q\,\omega$ et $P\,.\,p\,\omega$. Ainsi, en multipliant par ω les deux membres de l'équation [3], on voit que le travail moteur équivaut au travail de la résistance P, plus au travail de frottement, que les formules précédentes fournissent le moyen de calculer.

193. Si les articulations des balances étaient formées par des tourillons tournant dans des crapaudines de diamètre à peu près égal, la théorie précédente leur serait applicable. Mais ces articulations se faisant par des couteaux le frottement n'a plus lieu avec glissement, mais seulement avec roulement, et devient très peu sensible si les corps en contact sont durs et polis.

(*) Ici, il n'y a pas de N° 193. Un nouveau 192, suivi du 193 et d'un nouveau 194 (avec des contenus différents), suivent directement.

194. Tourillons à roulettes. *Le tourillon A (fig. 56) portant une charge P repose sur deux roulettes ou galets, qui peuvent tourner sur leurs tourillons B et B′.* Pour ne traiter qu'un cas très simple, on suppose que la direction de P, passant par le centre A, à égale distance des plans des deux galets, divise l'angle BAB' en deux parties égales. On demande quelle est la force Q qui, agissant à la distance q de l'axe A, serait sur le point de faire tourner le corps principal autour du tourillon A.

Si la force Q n'agissait pas, les galets recevraient et exerceraient chacun, aux points C et C', une même pression N, et appelant $2\,\alpha$ l'angle BAB', on aurait

$$P = 2\,N\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

La force Q devant être petite nous admettrons pour simplifier que son action n'altère pas sensiblement les pressions N ; de plus nous négligerons le frottement de roulement c'est-à-dire que nous supposerons que les pressions N continuent de passer par A.

Cela posé soient r, a, ρ les rayons du tourillon A, des galets et de leurs tourillons B et B' ; soit φ la résistance tangentielle qu'oppose chaque galet ; on aura l'équation des moments

$$Q\,q = 2\,\varphi\,r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Le galet B est en équilibre sous l'action d'une force tangentielle à sa circonférence, égale et opposée à la force φ, d'une force normale N suivant CB et de la réaction du coussinet sur le tourillon. Donc en appelant R la résultante des forces φ et N on a

$$R^2 = \varphi^2 + N^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

et

$$\varphi\,a = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\,R\,\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,4\,]$$

ces deux équations jointes aux deux précédentes [1] et [2] renferment la solution du problème. Pour l'obtenir approximativement on remarque, d'après [4], que φ est très petit par rapport à R, que, par conséquent, d'après [3] R est sensiblement égal à N qu'ainsi l'équation [4] devient approximativement $\varphi\,a = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\,N\,\rho$ et en substituant les valeurs de N et φ tirées de [1] et [2], on obtient

$$Q\,q = \frac{f\,P\,r}{\sqrt{1+f^2}} \cdot \frac{\rho}{a} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

tandis que si le tourillon A tournait sur un coussinet fixe, on aurait en supposant q très grand par rapport à r,

$$Q\,q = \frac{f\,P\,r}{\sqrt{1+f^2}}$$

Le moment $Q\,q$ de la puissance devra donc être d'autant moindre que a sera plus grand par rapport à ρ, et que l'angle α sera plus petit.

L'emploi de cet appareil suppose que les galets restent exactement cylindriques, ce qui est difficile sous de grandes pressions ; et quand les galets cessent de tourner, les avantages de ce dispositif deviennent illusoires.

§: 5. *Formules relatives au tirage des voitures.*

195. Pour simplifier considérons une seule roue qui roule sur un sol horizontal et dont le moyeu est traversé par l'essieu auquel est lié invariablement le reste du véhicule. Appelons

Q la résultante des forces verticales appliquées à la voiture, la roue non comprise (fig. 57 et 58),

q la distance de la résultante Q en arrière de la verticale passant par l'axe de l'essieu.

T le tirage, c'est-à-dire, la force horizontale appliquée à la voiture pour entretenir le mouvement uniforme,

h la hauteur horizontale T au-dessus de l'axe de l'essieu,

P le poids de la roue dont le centre de gravité est dans l'axe de la roue, ou de la boite du moyeu,

r le rayon de la roue,

ρ le rayon de la boite du moyeu,

ρ' le rayon de l'essieu, un peu plus petit que ρ.

La roue reçoit du sol diverses réactions qui peuvent être réduites à deux forces, l'une horizontale égale et de sens opposée à T, que nous appellerons T', l'autre verticale égale à $Q + P$ et que nous désignerons par $Q' + P'$. Cela résulte du théorème du mouvement du centre de gravité d'un système matériel quelconque. La force $Q' + P'$ peut être considérée comme appliquée à la roue en un point A', à une distance δ en avant de la verticale OA passant par l'axe de la roue ou du moyeu.

Cela posé considérons à part les forces qui sollicitent la roue et qui satisfont aux conditions de l'équilibre. Ces forces sont $T', Q' + P', P,$ et les actions de l'essieu sur la surface concave de la boite du moyeu, actions qui peuvent se réduire à deux forces l'une normale N, l'autre tangentielle $f N,$ dirigée en sens contraire du mouvement de rotation de la roue (soit que l'arête de contact de l'essieu et de la boîte se trouve en avant ou en arrière de la verticale OA ; nous distinguerons plus loin ces deux cas).

Les cinq forces $T', Q' + P', P, N, f N$ ont zéro pour la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque. Prenons pour cet axe celui de la roue ou de la boite, les moments de P et de N sont nuls et en mettant pour T' et $Q' + P'$ leurs valeurs T et $Q + P$, on a

$$T\,r - (Q+P)\,\delta - f\,N\,\rho = 0 \quad \ldots\ldots [\,1\,]$$

De plus la résultante des forces N et $f N$ rectangulaires, est égale à celle des forces T, $Q' + P',$, et $P,$ ce qui, attendu que P et $P'I$ sont égales et de sens opposés donne la relation

$$N^2\,(1+f^2) = T^2 + Q^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Maintenant les forces qui sollicitent la voiture, sans y comprendre la roue, sont Q, T et les réactions que nous désignerons par N' et $f N'$ lesquelles sont égales et opposées aux forces N et $f N$ ci-dessus considérées. Leurs moments pris par rapport à l'axe O' de l'essieu donne l'équation

$$Q\,q - T\,h - f\,N\,\rho' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

L'équilibre des mêmes forces $Q,\ T,\ N'$ et $f\,N'$ conduiraient aussi à l'équation [2] déjà obtenue.

196. Au moyen des trois équations ci-dessus si l'on suppose données les quantités $Q,\ h,\ r,\ \rho',\ \delta, f$ on déterminera $T,\ q$ et l'inconnue auxiliaire N. De [2] on tire

$$f\,N = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\sqrt{T^2+Q^2} \qquad \text{ou} \qquad f\,N = f_1\sqrt{T^2+Q^2}$$

et en substituant dans [1]

$$T = \left(Q+P\right)\frac{\delta}{r} + \frac{f_1\,\rho}{r}\sqrt{T^2+Q^2} \quad \ldots [\,4\,]$$

formule dans laquelle on peut remplacer approximativement $\sqrt{T^2+Q^2}$ par Q attendu que T est ordinairement petit par rapport à Q.

197. L'équation [3] par la substitution de la valeur de $f\,N$ devient

$$Q\,q = T\,h + f_1\,\rho'\sqrt{T^2+Q^2},$$

d'où l'on voit que q ne peut être nul ni négatif à moins que h ne soit négatif.

198. Déterminons maintenant la situation de l'arête B de contact de l'essieu et de la boite. Supposons qu'elle soit en avant de la verticale OA, (fig. 57) et appelons α l'angle AOB. L'équilibre des forces $Q,\ T,\ N',\ f\,N'$ donne deux équations entre leurs projections, savoir

$$\left.\begin{aligned} Q - N\cos\alpha + f\,N\sin\alpha = 0 \\ T - f\,N\cos\alpha - N\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où} \quad \sin\alpha = \frac{T - f\,Q}{\left(1+f^2\right)N} \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{Q + f\,T}{\left(1+f^2\right)N}$$

Si B était en arrière de la verticale OA (fig. 58), en appelant α l'angle AOB, on trouverait deux équations semblables aux précédentes, si ce n'est que les termes renfermant $\sin\alpha$ auraient leurs signes changés. Donc les deux dernières formules sont applicables aux deux cas, pourvu qu'on entende que si $\sin\alpha$ devient négatif, l'angle α est aussi négatif et le point B en arrière de la verticale OA. C'est ce qui a lieu quand δ est suffisamment petit : faisons par une hypothèse extrême $\delta = 0$; la formule [4] donne $T = \frac{f_1\rho}{r}\,Q$ quantité plus petite que $f\,Q$.

199. Nous avons fait connaître précédemment les incertitudes relatives à la détermination de la quantité δ qui selon Coulomb et M. Morin serait à peu près indépendante du rayon r, tandis que selon M. Dupuit elle serait proportionnelle à $\sqrt{r}$. Nous renvoyons aux écrits de cet auteur sur cette matière.

200. Supposons maintenant que le sol forme avec l'horizon un angle i, et que le mouvement étant ascendant la force T fasse un angle α au dessus de la parallèle au sol.

La réaction tangentielle au sol en sens contraire du mouvement étant désignée par T, on a

$$T_1 = T\cos\alpha - \left(Q+P\right)\sin i$$

et sa réaction normale N, a pour expression

$$N_1 = (Q+P)\cos i - T\sin\alpha\ .$$

Cela posé, on trouvera deux équations semblables aux formules [1] et [2] du n° 195 savoir,

1° l'équation du moment

$$T_1 r - N_1 \delta - f\,N\,\rho = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

2° l'équation exprimant que la résultante de N et fN est égale à celle des forces T et Q faisant un angle $\frac{\pi}{2}+\alpha+i$

$$N^2\left(1+f^2\right) = T^2+Q^2-2\,T\,Q\sin(\alpha+i)\ \ldots\ldots [\,2\,]$$

La substitution des valeurs de T_1 et de N_1 puis l'élimination de N conduisent à la relation finale

$$T\cos\alpha = (Q+P)\sin i + \left((Q+P)\cos i - T\sin\alpha\right)\frac{\delta}{r} + \frac{f_1\,\rho}{r}\sqrt{T^2+Q^2-2\,T\,Q\sin(\alpha+2)}$$

M. Morin dans son mémoire sur <u>le tirage des voitures</u> appelle <u>résistance opposée par le sol au roulement et rapporté à la circonférence de la roue</u> une force qu'il désigne par R et qui, d'après la formule qu'il donne, est la quantité

$$\left((Q+P)\cos i - T\sin\alpha\right)\frac{\delta}{r}$$

entrant dans l'équation ci-dessus. Dans les applications il fait $f_1 = 0{,}065$.

§: 6. *De la vis à filets carrés.*

201. On suppose que l'écrou (fig. 69) soit immobile, et que la vis, outre les réactions de l'écrou, reçoive l'action de trois forces : l'une P dirigée suivant l'axe supposé vertical, et les deux actions $\frac{1}{2}Q$ à la distance q de l'axe et formant un couple dont le plan est perpendiculaire à cet axe. On cherche la relation entre Q, P, q et les dimensions de la vis lorsque l'équilibre est sur le point d'être rompu par la force mouvante Q, tendant à faire monter la vis.

Nous supposerons les surfaces hélicoïdes en contact, réduites à une très petite largeur, et nous désignerons par r leur distance moyenne à l'axe de la vis.

Soit $\sum N$ la somme des composantes normales des réactions exercées sur la vis par la surface hélicoïde de l'écrou, $f\sum N$ sera la somme de leurs composantes tangentielles, dans le sens opposé du mouvement qui est sur le point de naître.

Soit i l'angle que fait avec l'horizon la tangente de l'hélice. Pour exprimer l'équilibre de translation parallèle à l'axe, on aura

$$\sum N\cos i - f\sum N\sin i - P = 0$$

et en prenant cet axe pour celui des moments, on aura aussi pour l'équilibre

$$Q\,q - r\sum N\sin i - r\,f\sum N\cos i = 0$$

d'où l'on tire . . . . . $\sum N = \dfrac{P}{\cos i - f\sin i}$

et par suite . . . . . $Q\,q\,P\,r\,\dfrac{\sin i + f\,\cos i}{\cos i - f\,\sin i} = P\,r\,\dfrac{tang\,i + f}{1 + f\,tang\,i}$ . . . . . [1]

Exemple $f = 0{,}12$; $tang\,i = \frac{1}{25}$;

$$Q\,q = P\,r\,\frac{0{,}04 + 0{,}12}{1 - 0{,}0048} = 0{,}1608\,P\,r\ ;$$

tandis que si le frottement était nul on aurait $Q\,q = 0{,}04\,P\,r$.

202. En nommant h le pas de la vis, on a $tang\,i = \frac{h}{2\,\Pi\,r}$ et par conséquent

$$Q\,q = P\,r\,\frac{h + 2\,\Pi\,r\,f}{2\,\Pi\,r - fh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

Si le frottement pouvait être négligé, on aurait comme l'indiquent les traités de statique et comme on le voit immédiatement par le théorème des mouvements virtuels, $Q = \frac{P\,h}{2\,\Pi\,q}$ quantité indépendante de r ; mais pour cela il faudrait que dans [1], f fût très petit relativement à $tang\,i$, ce qui ne se réalise jamais.

Il peut même arriver que Q devienne plus grand que toute quantité assignable ; c'est ce qui aurait lieu si l'on avait $tang\,i = \frac{1}{f}$; l'équation [1] donne alors $Q = \infty$.

203. S'il s'agissait de déterminer la force P capable de faire descendre la vis malgré la résistance des forces $\frac{1}{2}\,Q$, il suffirait, dans la formule [1] de changer le signe de f et de résoudre par rapport à $P\,r$; on trouverait

$$P\,r = Q\,q\,\frac{1 + f\,tang\,i}{tang\,i - f}$$

d'où il suit que la vis n'obéira à la force P qu'autant qu'on aura $tang\,i > f$. C'est sur cette propriété qu'est fondé l'usage des vis de pression.

204. C'est aussi de l'existence du frottement que résulte l'efficacité du contre-écrou qui assure l'invariabilité de l'assemblage d'une vis et de son écrou principal; et qui joue un rôle analogue à celui du cône dans certains assemblages à tenons et mortaises.

205. Dans le cas où $tang\,i$ est moindre que f, on peut demander qu'elle doit être la valeur de chaque force $\frac{1}{2}\,Q$ agissant dans le sens de la descente pour que la vis soit sur le point de descendre ; il suffira dans ce cas de changer à la fois le signe de Q et celui de f, dans l'équation [1] et l'on aura

$$Q\,q = P\,r\,.\,\frac{f - tang\,i}{1 + f\,tang\,i}\,.$$

206. Les équations précédentes subsistent dans le cas où la vis se meut d'un mouvement uniforme.

Pendant une révolution entière, le travail de Q, est de $2\,\Pi\,q\,Q$, et le travail de P, pris d'une manière absolue est $P\,h$. On a donc

$$\frac{\tau\{Q\}}{\tau\{P\}} = \frac{Q\,.\,2\,\Pi\,q}{p\,h} = \frac{Q\,q}{P\,r} \qquad \frac{2\,\Pi\,r}{h} = \frac{Q\,q}{P\,r} \qquad \frac{1}{tang\,i}$$

ou en vertu de l'équation [1]

$$\frac{\tau\{Q\}}{\tau\{P\}} = \frac{tang\ i + f}{tang\ i - f\ tang^2\ i} = 1 + \frac{f\left(1 + tang^2\ i\right)}{tang\ i - f\ tang^2\ i} \quad \ldots\ldots\ldots [\ 3\ ]$$

C'est ce qu'on obtiendrait à l'aide de la seule équation [1] en remarquant que le rapport des travaux de Q et de P est égal au rapport de ces forces multiplié par un nombre constant qu'on détermine par la condition que le rapport des travaux devient l'unité quand on fait $f = 0$.

Le travail consommé par le frottement est donc au travail de P, c'est à dire à l'effet utile, dans le rapport exprimé par

$$\frac{f\left(1 + tang^2\ i\right)}{tang\ i - f\ tang^2\ i}\ .$$

$tang\ i$ est ordinairement un petit nombre, et alors la formule [3] se réduit approximativement à

$$\frac{\tau\{Q\}}{\tau\{P\}} = 1 + \frac{f}{tang\ i}$$

Exemple : $f = 0{,}12\ ;\ tang\ i = \frac{1}{25}\ ;$

$$\tau\{Q\} = \tau\{P\}\left(1 + 0{,}12\ \frac{626}{24{,}88}\right) = 4{,}02\ \tau\{P\}\ ;$$

ou approximativement . . . . . $\tau\{Q\} = 4\ \tau\{P\}$.

207. Le rapport du travail moteur de Q au travail résistant de P pourrait être diminué en augmentant *tang i.*

Par exemple, en laissant $f = 0{,}12$ et faisant $tang\ i = 0{,}9$ nous aurions

$$\frac{\tau\{Q\}}{\tau\{P\}} = 1 + \frac{0{,}12 \times 1{,}81}{0{,}9 - 0{,}12 \times 0{,}81} = 1{,}27$$

La perte, due au frottement, serait, comme on voit, peu considérable ; puisqu'elle serait les 27 centièmes du travail utile ; mais le moment de l'effort Q ne serait plus très petit par rapport à $P\ r$ et l'on perdrait ainsi l'avantage qu'on recherche dans la vis ; car on aurait

$$Q\ q = P\ r\ .\ 1{,}27 \times 0{,}9 = 1{,}143\ P\ r$$

208. Dans tout ce paragraphe on n'a considéré que le cas où la vis est sollicité par une force suivant l'axe, et par un couple perpendiculaire à cet axe. Dans tout autre cas, il y aurait à considérer ds frottements latéraux, soit contre l'écrou, soit contre d'autres guides de la vis.

§: 7. Frottement des boutons de manivelle ou excentriques contre leurs coussinets ou bagues.

209. Un arbre à manivelle peut être considéré comme un treuil, avec cette seule différence que quelques unes des forces qui le sollicitent agissent par l'intermédiaire de bielles. La question d'équilibre d'un tel système, eu égard au frottement, n'offrirait pas de difficulté théoriques. Il ne s'agirait que d'introduire dans les calculs les actions réciproques des surfaces

en contact, en se rappelant qu'à l'instant où le mouvement est sur le point de mettre les forces reçues par l'un des corps, de la part de celui qui le touche, se décomposent en forces normales N et en forces tangentielles $f N$, le sens de celles-ci étant opposé à celui du mouvement du premier corps relativement au second. On écrirait les conditions d'équilibre de chaque pièce du système, puis on éliminerait les pressions inconnues.

210. Nous nous bornerons à considérer le frottement d'une manivelle dans l'état de mouvement, sous le rapport du travail résistant que ce frottement développe.

En général quand deux corps sont en contact et se meuvent tous deux en exerçant l'une sur l'autre des actions moléculaires, le travail total qui résulte de ces actions ne dépend que de leurs intensités et du mouvement relatif des deux corps ; d'où il suit que si l'on réduit l'un d'eux au repos en modifiant le mouvement absolu de l'autre, de manière que le mouvement relatif ne soit pas changé et que les actions réciproques restent les mêmes, le travail dû à ces actions ne sera pas altéré.

211. Soit O (fig 60) l'axe fixe de l'arbre. A un point de l'axe du bouton mobile et décrivant un cercle ou un arc de cercle autour de O. Soient $A_0, A_1, A_2, \ldots$ des positions successives de l'axe des boutons ; $A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ les directions correspondantes de la bielle ; $P_0, P_1, P_2, \ldots$ les efforts que la bielle exerce alors sur le bouton. Transportons le rayon OA_0 en oa, (fig. 61) puis par le point a menons $ab_0, ab_1, ab_2, \ldots$ faisant avec ao des angles $b_0ao, b_1ao, b_2ao \ldots$ égaux aux angles $B_0 A_0 O, B_1 A_1 O, B_2 A_2 O \ldots$ et traçons autour de a un cercle représentant celui du bouton de la manivelle. Si nous supposons qu'une bielle prenne successivement les directions $ab_0, ab_1, ab_2, \ldots$ en exerçant les efforts P_0, P_1, P_2 sur un anneau embrassant le cercle, le travail du frottement sera précisément celui qu'il s'agit de calculer.

Or l'intensité du frottement à chaque position est $f P$; le chemin décrit par le point d'application de cette force résistante se compose des éléments de l'arc $b_0, b_1, b_2, \ldots$ d'où l'on conclut qu'on obtient le travail en portant sur un axe des abscisses les longueurs $b_0b_1, b_1b_2,$ (fig. 62) puis les forces $f_1 P_0, f_1P_1, f_1P_2, \ldots$ en ordonnées et enfin en calculant l'aire de la courbe ainsi construite.

212. Dans le cas particulier où la bielle resterait parallèle à elle-même et exercerait un effort constant P, le travail du frottement pour une révolution entière de la manivelle serait évidemment $2 \Pi r . f_1 P$

Il importe donc de ne pas augmenter au delà du besoin le rayon r du bouton ; aussi ne doit-on pas employer les excentriques pour exercer de grandes forces.

§: 8. Frottement mixte de roulement et de glissement ; engrenages.

213. Soit MN (fig. 60) une surface cylindrique terminant un corps supposé fixe, soit $ABCD$ la surface cylindrique terminant un autre corps qui se meut en touchant toujours le premier. Si, dans une seconde position quelconque, le corps mobile venait en $A'B'C'D'$ (les points A, B, C, D étant respectivement transportés en A', B', C', D') de telle sorte que l'arc

BC' de la courbe MN fût de même longueur que l'arc BC de la courbe $ABCD$, il y aurait simple roulement ; et les corps en contact étant supposés durs et polis, le frottement pourrait ordinairement être négligé. Mais si la seconde position est A'', B'', C'', D'', de manière que BC'' soit plus grand que BC, il y aurait tout à la foi roulement et glissement et la différence entre les axes BC'' et BC est ce qu'on nomme l'axe de glissement.

Dans ce cas on admet, sans toutefois que cette opinion soit appuyée sur des expériences spéciales, que le travail résistant ou négatif dû aux actions mutuelles des corps en contact, est le même que si le corps mobile s'était transporté d'abord par simple roulement de $ABCD$ en $A'B'C'D'$ et ensuite par simple glissement de $A'B'C'D'$ en $A''B''C''D''$. Il en résulte que si l'on néglige le frottement de roulement, en appelant R la réaction d'un des corps sur l'autre, N sa composante normale $f\,N$, ou ce qui revient au même $\frac{f\,R}{\sqrt{1+f^2}}$, ou $f_1\,R$, sera sa composante tangentielle ; et que le travail négatif dû au frottement dans le passage de $ABCD$ en $A''B''C''D''$ sera $f_1 R$ x $C'C''$.

On remarquera que si le déplacement du corps mobile est infiniment petit, les points CB'' peuvent être considérés comme situés sur MN, et qu'on a

$$C'C'' = BC'' - BC' = BC'' - BC = BC'' - B''C'' = BB''$$

Ainsi l'arc de glissement est le chemin élémentaire parcouru par le point B considéré comme appartenant au corps mobile, pendant un très petit temps, à partir de l'instant ou ce point était en contact.

214. Le roulement et le glissement simultanés, au lieu d'être de même sens, comme dans l'exemple précédent, peuvent être de sens contraire $ABCD$ (fig. 64) étant toujours la première position du corps mobile, et $A'B'C'D'$ la position qu'il prendrait s'il avait simplement roulé sur MN, la seconde position peut être $A''B''C''D''$, les mêmes lettres diversement accentuées représentant toujours les points matériels du corps mobile. Il se pourrait même que tandis que le roulement tend à porter le point de contact vers la droite du point B, le glissement le portât à gauche.

Quoi qu'il en soit, on admet encore que le travail négatif dû au frottement est exprimé, comme dans le cas précédent par $f_1 R$ x $C'C''$, c'est à dire qu'il est le même que si le corps parti de la position $A'B'C'D'$ s'était transporté par simple glissement en $A''B''C''D''$; et si le déplacement est infiniment petit, la distance de B'' à la courbe MN étant un infiniment petit du second ordre, on a $C'C'' = B'B''$.

215. L'hypothèse qu'on vient de considérer, différente, au premier abord, de la première, y est cependant renfermée ; car, si l'on suppose que le corps $ABCD$ soit fixe et que MN devenue mobile prenne les mêmes positions relatives qu'auparavant, on verra que, dans le cadre du n° 213 le roulement et le glissement de MN seraient en sens contraire ; tandis qu'ils seraient de même sens dans le cas du n° 214.

216. *Application aux engrenages* — La roue AB (fig. 65) conduit la roue $A'B'$. Le contact a lieu en T sur la ligne des centres, et passe en T', pendant que les roues s'avancent d'un pas. Si R est l'intensité de l'action mutuelle des surfaces en contact, et a la longueur du

pas TM ou TM', le travail transmis à la roue conduite diffère très peu de Ra, c'est-à-dire de ce qu'il serait si la force R agissait tangentiellement au cercle primitif.

Le travail négatif du frottement, dépendant du mouvement relatif est égal à $f_1 R\ (MT' - TM')$ ou $f_1 R$ x MM', le point M' pouvant être considéré comme situé sur la courbe MT. Or les arcs TM et TM' étant égaux, et d'ailleurs supposés petits par rapport à leurs rayons, les ordonnées LM, LM' diffèrent très peu l'une de l'autre, et la distance MM' peut être remplacée par LL' ou $TL + TL'$.

Mais, si l'on appelle r et r' les rayons des deux cercles primitifs, qui se touchent en T, et que l'on considère les cordes TM, TM' comme se confondant avec les arcs qu'elles sous-tendent, c'est à dire comme égaux au pas a, on obtient

$$TL = \frac{a^2}{2\,r}\ ,\ TL' = \frac{a^2}{2\,r'}\ ,$$

et le travail du frottement devient

$$\frac{1}{2}\,f_1\,R\,a^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\ ;$$

ainsi le travail moteur nécessaire pour transmettre à la roue conduite le travail $R\,a$, et vaincre en même temps le frottement de l'engrenage est

$$R\,a+\frac{1}{2}\,f_1\,R\,a^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

ou

$$R\,a\left[1+\frac{1}{2}\,f_1\,a\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\right]\ ;$$

ou bien, en appelant τ le travail moteur et τ' le travail transmis à la seconde roue

$$\tau = \tau'\left(1+\frac{1}{2}\,f_1\,a\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\right).$$

Par ces formules dues à M. Poncelet, et dont nous avons seulement simplifié la démonstration en partant de l'hypothèse d'un pas très petit, on voit que le travail consommé par le frottement varie, pour des rayons donnés, proportionnellement au pas.

217. Si l'engrenage est cylindrique, on transforme cette formule en y introduisant les nombres n et n' des dents des deux roues.

On a $a = \frac{2\,\Pi\,r}{n}$; $a = \frac{2\,\Pi\,r'}{n}$, d'où $\frac{a}{2\,r} = \frac{\Pi}{n}$; $\frac{a}{2\,r'} = \frac{\Pi}{n'}$

de là

$$\tau = \tau'\left[1+f_1\,\Pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)\right]$$

Exemple $f\ 1 = 0{,}10$; $n = 20$; $n' = 40$; $f_1\,\Pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right) = 0{,}024$.

218. Si l'engrenage est conique (fig. 66), il faut, suivant la remarque de M. Poncelet, conserver la formule du n° 216, en prenant pour r et r', non les rayons CT et CT', mais les

distances OT, $O'T$ comptées sur une perpendiculaire à la génératrice de contact AT parce que les courbes des dents se touchent en effet pendant une courte durée comme si elles restaient dans le plan OO' perpendiculaire à AT.

219. Les formules ci-dessus supposent que les dents ne se touchent qu'à partir de la ligne des centres, et qu'il n'y a jamais qu'une dent en prise sur chaque roue. Si, en conservant cette dernière hypothèse, on admettait que le contact commençât à un demi-pas avant la ligne des centres et se terminât un demi-pas après, on réduirait à moitié le travail dû au frottement, comme on peut s'en convaincre en remplaçant a par $\frac{1}{2}a$ et doublant ensuite le résultat.

Mais il vaut mieux, dans la pratique, ne pas compter sur cette réduction. L'usage est de faire commencer le contact un pas avant la ligne des centres et finir un pas après ; dans ce cas, il y a toujours deux dents de chaque roue en prise et les formules ci-dessus établies subsistent.

D'ailleurs la théorie précédente n'a pas égard à l'inexactitude de diversion des roues, et à la déformation inévitable des dents, d'où résultent de petits chocs, et des pertes de travail qu'il faut ajouter à celles du frottement. Des expériences diverses sur cette matière seraient d'un grand intérêt.

220. Nous venons de considérer le frottement d'un engrenage dans le cas où le pas est très petit, et nous avons dit que la formule obtenue s'applique également, soit que le contact de deux dents commence à la distance d'un pas de la ligne des centres, soit qu'il commence sur la ligne des centres pourvu qu'il finisse toujours à la distance d'un pas de cette ligne. Il n'en serait plus de même si les dents devaient se prendre et se quitter à une grande distance de la ligne des centres.

Soient 2 roues (fig. 67) dont les dents MT', $M'T'$ se touchent en T'. Cherchons la condition d'équilibre entre les deux forces Q, P et supposons que Q soit la force mouvante ; le contact dans ce cas a lieu après la ligne des centres.

La roue dont le centre est C' est en équilibre sous l'action de la force P, de la réaction normale N' et d'une réaction tangentielle fN' dirigée suivant $T'M'$ (voir la fig. 67) ; on a donc par la condition des moments

$$P\,r' - N'\,x' = 0$$

La roue dont le centre est C est en équilibre sous l'action de la force Q, de la réaction normale N égale à N', et d'une réaction tangentielle fN dirigée suivant $T'C'$; on a donc

$$Q\,r - N\,x - f\,N\,y = 0$$

faisant $N' = N$ et éliminant cette quantité, on trouve

$$\frac{Q}{P} = \frac{r'}{r}\,\frac{x + f\,y}{x'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Q}{P} = 1 + f\,\frac{y}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

en remarquant la relation $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{x'}{x}$.

Maintenant supposons au contraire que P soit la force mouvante. Le contact a lieu alors <u>avant</u> la ligne des centres et la seule différence à apporter au cas précédent sera dans le sens

des réactions tangentielles, dont l'une $f\,N'$ sera dirigée suivant $T'C'$ et l'autre $f\,N$ suivant TM ; de sorte que les équations seront :

$$P\,r' - N'\,x' = 0 \qquad \text{et} \qquad Q\,r - N\,x + f\,N\,y = 0$$

d'où $$\frac{P}{Q} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{x'}{x - f\,y} \qquad \text{ou} \qquad \frac{P}{Q} = \frac{1}{1 - f\,\frac{y}{x}} \quad \ldots\ldots\ldots [2]$$

Dans les deux cas le rapport de la force mouvante à la force résistante est plus grand que l'unité. Mais dans le second il peut devenir beaucoup plus grand que dans le premier. En faisant par une hypothèse extrême $f\,\frac{y}{x} = 1$ on aurait $1 + f\,\frac{y}{x} = 2$ tandis que $\frac{1}{1 - f\,\frac{y}{x}}$ serait ∞.

D'où l'on conclut qu'il est possible de déposer deux dents d'engrenage qui satisfaisant aux conditions géométriques du tracé ne marcheraient pas quand on voudrait les faire tourner dans un certain sens, c'est à dire en faisant commencer le contact loin de la ligne des centres, et cherchant ensuite à rapproche les deux dents de cette ligne. Il y aurait alors ce qu'on appelle un arc-boutement.

Cet effet n'a pas lieu quand y est petit par rapport à x et alors les deux quantité $\frac{1}{1 - f\,\frac{y}{x}}$ et $1 + f\,\frac{y}{x}$ sont sensiblement égales, puisque leur rapport est celui de 1 à $1 + f^{2.}\,\frac{y^2}{x^2}$.

§: 9. *De la raideur des cordes.*

221. Lorsque, sur une poulie mobile autour de son axe C (fig. 68), passe par une corde sollicitée à ses extrémités par les forces P et Q, l'expérience prouve que soit pendant le mouvement uniforme, soit à l'instant où le mouvement est sur le point de naître, la force mouvante Q est plus grande que la résistance P, d'une quantité qui excède l'augmentation due au frottement de l'essieu de la poulie sur ses appuis.

Cet excès est un effet de la raideur de la corde, et s'explique soit par la figure que la corde affecte et de laquelle il résulte que le bras de levier de la résistance P est plus grand que celui de la force mouvante Q, soit par le travail résistant à vaincre pour ployer la corde.

Il résulte des expériences de Coulomb (*Mémoires des savants étrangers*. tome 10.) que, abstraction faite du frottement de l'essieu, l'excès Q - P peut être représenté par la formule

$$Q - P = \frac{A + BP}{D},$$

D étant le diamètre de la poulie, augmenté de celui de la corde, A et B étant deux quantités indépendantes de P et de D, mais variables avec le diamètre, la nature de la corde blanche ou goudronnée sa sécheresse ou son humidité, son état de vétusté.

Le tableau suivant, calculé par Navier, donne pour certaines cordes expérimentées par Coulomb, les valeurs de A et de B qui conviennent quand on prend le Kilogramme pour unité de force et le mètre pour unité linéaire. Ces cordes étaient formées de trois torons ou cordes moins grosses et les torons composés d'un certain nombre de brins nommés fils de caret.

Tableau pour calculer la raideur de différentes cordes autour d'une poulie d'un mètre de diamètre.

Indication des cordes	*Diamètre des cordes*	*Poids des cordes par mètre de longueur*	*Raideur constante A*	*Raideur par Kil. de résistance B*
Cordes blanches de 30 fils	$0^{m},020$	$0^{K},283$	$0^{K},222$	0,0097
" 15 "	0,014	0,145	0,064	0,0055
" 6 "	0,009	0,052	0,011	0,0024
Cordes goudronnées de 30 fils	0,024	0,333	0,350	0,0126
" 15 "	0,017	0,163	0,106	0,0061
" 6 "	0,010	0,069	0,021	0,0026

On voit par ce tableau que les quantité A et B ne varient pas, avec la grosseur de la corde, suivant une même loi ; (A est à peu près proportionnel à la 4^{e} puissance et B à la 2^{e} du diamètre) c'est ce qui prouve l'inexactitude de la formule donnée à cet égard par plusieurs auteurs d'après Coulomb. Les expériences rapportées par ce grand physicien ne sont pas suffisantes pour permettre d'introduire dans la formule l'influence de l'usé de la corde. Ce qui est certain c'est que, avec des diamètres égaux, une corde à demi usée a toujours moins de raideur qu'une corde en bon état.

222. Selon Navier (*Leçons 1ère partie* page 43) la résistance moyenne des cordes est de 5 à 6 Kilog. par millimètre carré de la section ; mais on ne doit pas leur faire supporter plus de la moitié de cet effort.

223. De la formule n° 221 on conclut que si r et r' désignent les distances de l'axe de la poulie aux axes des deux parties rectilignes de la corde on a

$$P\,r' = Q\,r \qquad \text{ou} \qquad P\,r' = P\,r + \frac{1}{2}(A + BP)$$

attendu que r diffère très peu de $\frac{1}{2}D$.

224. Condition pour l'équilibre ou le mouvement uniforme de la poulie en ayant égard au frottement de l'essieu. Appelons

r le rayon de la gorge de la poulie, augmenté de celui de la corde

r' la distance de l'axe de figure de la poulie, à l'axe de la portion de corde à laquelle est appliquée la résistance P

f le rayon de l'essieu si celui-ci est fixé à la poulie ; si l'essieu tient à la chape, ρ est le rayon de l'œil de la poulie

R la réaction oblique, totale, que la poulie reçoit de ses appuis ; N et $f\,N$ sont ses composantes

En négligeant le poids de la poulie on a

$$R = N\sqrt{1+f^2} = \sqrt{P^2+Q^2+2\,P\,Q\cos(P\,,\,Q)}$$

et $$Q\,r = P\,r' + f\,N\,\rho\ ;$$

de là et de la formule du n° 223 on conclut

$$Q = P + \frac{1}{2\,r}(A+BP) + f_1\frac{\rho}{r}\sqrt{P^2+Q^2+2\,P\,Q\cos(P\,,\,Q)}\,.$$

Dans le cas particulier où les forces P et Q sont parallèles, cette formule devient

$$Q = \frac{1}{r - f_1\rho}\left(\frac{1}{2}A + \left(r + \frac{1}{2}B + f_1\rho\right)P\right),$$

équation qui est de la forme $Q = \alpha + \beta P$.

225. Calcul des mouffles ou palans, en négligeant le poids de la corde, celui des poulies, le frottement latéral de celles-ci, et supposant les poulies égales et les cordons sensiblement parallèles (fig. 69)

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n$ les tensions des cordons, non compris celui sur lequel agit la force mouvante Q ; r le rayon de chaque poulie augmenté de celui de la corde ; ρ le rayon des trous des poulies ; α et β étant des fonctions, déterminées comme ci-dessus des quantités connues r , ρ , A , B et f_1 , on aura

$$T_2 = \alpha + \beta\,T_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha\frac{\beta-1}{\beta-1} + \beta\,T_1$$

$$T_3 = \alpha + \beta\,T_1 = \alpha(1+\beta) + \beta^2\,T_1 \ldots\ldots\ldots = \alpha\frac{\beta^2-1}{\beta-1} + \beta^2\,T_1$$

$$T_4 = \alpha + \beta\,T_2 = \alpha(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\,T_1 \ldots\ldots = \alpha\frac{\beta^3-1}{\beta-1} + \beta^4\,T_1$$

- -

$$T_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha\frac{\beta^{n-1}-1}{\beta-1} + \beta^{n-1}\,T_1$$

$$Q = \alpha + \beta\,T_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha\frac{\beta^n-1}{\beta-1} + \beta^n\,T_1$$

de plus $$P = T_1 + T_2 + \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ + T_n$$

En plaçant en tête de ces équations l'égalité $T_1 = \alpha\frac{1-1}{\beta-1} + 1\,T_1$ et ajoutant les n tensions depuis T_1 jusqu'à T_n, on obtient

$$P = \frac{\alpha}{\beta-1}\left(\frac{\beta^n-1}{\beta-1} - n\right) + \frac{\beta^n-1}{\beta-1}\,T_1$$

Éliminant T_1 entre cette équation et celle qui donne la valeur de Q on trouve

$$Q = \alpha\left(\frac{n\,\beta^n}{\beta^n-1} - \frac{1}{\beta-1}\right) + \frac{(\beta-1)\,\beta^n}{\beta^n-1}\,P\ ;$$

équation dans laquelle n est le nombre des cordons qui vont d'une chape à l'autre.

Si l'on faisait abstraction du frottement et de la raideur, on aurait

$$Q = \frac{P}{n}$$

226. Exemple tiré du cours lithographié de M. Poncelet.

Deux systèmes de quatre poulies ; $n = 8$;

$D = 0{,}1006$; $d = 0{,}018$, d'où $r = 0{,}0593$; $\rho = 0{,}0105$;

$f = 0{,}155$ (cuivre sur fer sans enduit) d'où $f_1 = 0{,}153$

On trouve $\alpha = 1{,}6039$; $\beta = 1{,}1267$; $Q = 12^{Kil,18} + 0{,}288\ P$. Si l'on négligeait le frottement et la raideur, on devrait avoir

$$Q = 0{,}125\ P$$

Les chemins parcourus simultanément par les points d'application des forces P et Q sont dans le rapport de 1 à n. Il en résulte

$$\tau\{P\} : \tau\{Q\} :: P : n\,Q$$

On voit par la formule précédente que ce rapport n'est pas constant. Dans l'exemple ci-dessus, on a

$$\tau\{P\} : \tau\{Q\} :: P : 8\,Q \qquad \text{c'est à dire} \qquad :: P : 97^{K}\,,\ 44 + 2{,}304\ P\ .$$

Suivant que P serait de 200 ou de 2.000 Kilog., ce rapport des travaux serait celui de 1 à $2{,}79$ ou de 1 à $2{,}35$.

§: 10. *Frottement d'une corde ou d'une courroie sur un cylindre fixe.*

227. Considérons d'abord une portion de prisme régulier M_0, M_1, *etc,* (fig. 70) pressée au milieu de ses faces par des corps liés entre eux au moyen de fils perpendiculaires aux rayons OM_0, OM_1, *etc.,* et qui passent respectivement par les points M_0, M_1, *etc*. Le premier de ces fils a une tension égale à la résistance P ; on demande la tension Q du dernier à l'instant où le mouvement est sur le point de naître dans le sens de Q.

Soit (fig. 71) T la tension du fil qui passe en M, $T + \Delta T$ celle du fil qui passe en M' ; α la moitié de l'angle MOM' ; N la réaction perpendiculaire à la face MM', $f N$ le frottement qui y correspond. On a, en considérant les composantes des tensions dans la direction MM' et dans la direction ON :

$$f\ N = \Delta T\ .\ \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad N = (2\,T + \Delta T)\sin\alpha$$

d'où en éliminant N, $$\Delta T = \frac{2\,f\,T\,tang\,\alpha}{1 - f\,tang\,\alpha}$$

Lorsque α est très petit, on peut négliger $f\ tang\ \alpha$ vis à vis de l'unité ; et si l'on désigne par ΔS la longueur MM', on peut remplacer, au numérateur, $tang\ \alpha$ par $\frac{\frac{1}{2}\Delta S}{r}$; il vient alors

$$\Delta T = \frac{f\,\Delta S}{r}\ .\ T$$

Pour passer du cas considéré à celui d'une corde glissant sur un cylindre il suffit de faire ΔT et ΔS infiniment petit et de poser

$$\frac{d\,T}{T} = \frac{f\,d\,s}{r}$$

d'où l'on tire en intégrant entre les limites O et s, qui répondent aux valeurs P et Q de la tension T, s désignant l'arc total embrassé par la corde

$$\log \frac{Q}{P} = \frac{f\,s}{r}\ logs\ , \qquad \text{ou} \qquad \frac{Q}{P} = (2.71828)^{\frac{f\,s}{r}}$$

228. *Remarque* — Le rapport $\frac{Q}{P}$ ne dépend point de l'arc s mais seulement du rapport $\frac{s}{r}$ et du nombre de degrés de l'arc embrassé. Il en résulte que la formule s'applique à un cylindre quelconque, et l'on y remplace $\frac{s}{r}$ par l'arc de cercle qui, ayant le *rayon = 1,* mesure l'angle des deux normales extrêmes à l'arc embrassé. Si m est le nombre de degré de cet angle, la valeur à substituer pour $\frac{s}{r}$ sera $\frac{m\,\Pi}{180}$.

229. D'après les expériences de M. Morin, le frottement des courroies parait être indépendant de leur largeur ; et l'on a

f = 0,47 pour des courroies ordinaires sur tambour en bois
0,50 --------- " ---------- neuves ---------- " ----------
0,28 --------- " ---------- ordinaires sur poulies en fonte
0,38 --------- " ---------- humides ---------- " ----------
0,50 pour des cordes de chanvre sur poulies en bois

230. D'après le même auteur on peut faire supporter sans risques à une courroie en cuir une tension de $0^{Kg}.25$ par millimètre carré de section.

§:11. De la transmission du mouvement au moyen de cordes ou courroies sans fin.

231. Deux corps tournant autour des axes A et A' (fig. 72) portent des poulies sur lesquelles s'enroule une corde ou courroie sans fin, convenablement tendue. Les forces Q et P étant appliquées respectivement aux deux corps, on demande les conditions de l'équilibre au moment ou le mouvement est sur le point de naître dans le sens de la force mouvante Q, eu égard au frottement des tourillons A et A', et en faisant abstraction de la raideur de la courroie, laquelle est ordinairement peu sensible. Pour plus de simplicité on suppose les forces P et Q verticales, et la courroie sensiblement horizontale entre les deux poulies.

Si la courroie est suffisamment tendue pour ne glisser sur aucune des deux poulies, en nommant T et t les tensions des deux portions de la courroie, R et R' les rayons des poulies, ρ , ρ' les rayons des tourillons, p et q les bras de levier des forces P et Q ; on aura

pour la poulie A $\qquad Q\,q - (T-t)\,R - f_1\,\rho\,\sqrt{Q^2 + (T+t^2)} = 0$ . . . . . [1]

pour la poulie B $\qquad (T-t)\,R' - P\,p - f_1\,\rho'\,\sqrt{P^2 + (T+t)^2} = 0$ . . . . . [2]

Pour que la courroie ne glisse sur aucune des deux poulies, il faut que le rapport $\frac{T}{2}$ soit plus petit que la valeur calculée au n° 227 pour le cas où le glissement est sur le point de naître. Ainsi on devra avoir en même temps

$$\frac{T}{t} < e^{\frac{f S}{R}} \quad \text{et} \quad \frac{T}{t} < \frac{f S'}{R'}$$

S et S' étant les arcs embrassés par la courroie sur les poulies A et A'.

En général, les seconds membres de ces inégalités peuvent différer par deux raisons : soit parce que les angles exprimés par $\frac{S}{R}$ et $\frac{S'}{R'}$ diffèrent, soit parce que la matière des poulies n'étant pas la même, le coefficient f du frottement n'a pas la même valeur dans les deux cas.

Dans l'hypothèse de l'énoncé on a

$$\frac{S}{R} = \frac{S'}{R'} = \Pi$$

mais le coefficient f peut n'être pas le même.

Soit m le plus petit des seconds membres des inégalités précédentes, on devra poser

$$\frac{T}{t} < m \qquad \text{ou bien} \qquad T = K\, m\, t \ldots\ldots\ldots [3]$$

K étant moindre que l'unité et d'autant plus petit que l'appareil sera exposé à des secousses. Si cette circonstance n'existe pas on fera $m = 0{,}9$ environ.

Les équations [1], [2], [3] fournissent la solution du problème.

Les équations [1] et [2] suffiraient si la somme $T + t$ des tensions était donné à priori.

232. La somme $T + t$ des deux tensions reste constante pendant toute la durée du mouvement. Cela résulte de ce qu'un corps élastique de forme prismatique, soumis à un effort de traction dans le sens de sa longueur, éprouve un allongement proportionnel à cet effort et à sa longueur primitive, pourvu que l'effort ne soit pas assez considérable pour que l'élasticité de la matière soit altérée.

Soit T' la tension commune des deux brins telle qu'elle serait si les forces P et Q n'agissaient pas encore ; soit L la longueur commune de ces deux brins dont les molécules seraient alors dans le même état d'écartement ; soit λ la longueur qu'aurait chacun de ces brins dans leur état naturel, c'est-à-dire s'ils n'étaient pas tendus. L'allongement $L - \lambda$ correspondra à la tension T' et l'on aura

$$L - \lambda = a\, \lambda\, T' \ldots\ldots [1]$$

en désignant par a l'allongement qu'une force de 1^K donnerait à 1^m de courroie.

La tension devenant T pour l'un des brins, soit l le nouvel accroissement de sa longueur ; on a de même

$$L + l - \lambda = a\, \lambda\, T \ldots\ldots [2]$$

et l'accroissement l passe sur la poulie conductrice.

Mais en même temps la partie de courroie qui formait le second brin ne conserve, dans son nouvel état, la longueur L que par l'addition de la quantité l qui se déroule de dessus la poulie conductrice. t étant la tension correspondante à l'allongement $L - l - \lambda$ on a

$$-l - \lambda = a\, \lambda\, t \ldots\ldots\ldots [3]$$

Or, des équations [1], [2], [3], en additionnant d'abord les deux dernières, on tire $T + t = 2\,T'$.

Donc la somme $T + t$ des tensions est la même à un instant quelconque qu'au moment où les poulies n'étaient point encore sollicitées par les forces P et Q ; c'est à dire au double de la tension initiale de l'un des brins.

On peut régler la tension initiale de la courroie, soit en faisant varier sa longueur jusqu'à ce qu'elle soit convenablement tendue, soit par un dispositif qui permet d'écarter à volonté les axes des poulies. En général on doit éviter de tendre la courroie beaucoup plus qu'il ne faut, parce que la résultante des deux tensions produit une pression sur chacun des axes, et donne par conséquent lieu à un accroissement de frottement.

233. Indépendamment des variations de tension qui sont dues au mouvement, la courroie en subit encore d'autres qui dépendent de l'état hygrométrique de l'atmosphère. C'est pour y remédier que l'on emploie une poulie de tension (fig. 73).

Soit N l'effort exercé par le rouleau de tension, et α l'angle obtus que forment les deux parties de la courroie sur laquelle il agit. La force N étant sensiblement dirigée suivant la bissectrice de l'angle α et T étant la tension des deux parties du brin de la courroie sur laquelle agit le rouleau, ou approximativement

$$2\,T \cos \frac{1}{2}\,\alpha = N$$

relation qui permet de déduire T de N, ou N de T.

234. Les poulies à courroie plate ne sont pas cylindriques, mais légèrement bombées : de cette manière la courroie est un peu plus tendue au milieu que sur les bords, ce qui maintient sa position régulière. Les bombements de deux poulies inégales en communication doivent être proportionnelles aux rayons afin que les vitesses soient égales dans deux circonférences quelconques situées sur les deux poulies dans un même plan perpendiculaire aux axes. Le bombement moyen des deux poulies est d'environ $\frac{1}{10}$ de leur largeur.

235. Une courroie sans fin étant en mouvement, si la résistance P vient à augmenter au point que la relation $\frac{T}{t} < m$ du n° 231 ne soit plus satisfaite, la courroie glissera dans les scieries, lorsque la scie vient à rencontrer un nœud. Si la puissance vive possédée par la scie est assez grande pour égaler l'excès de travail qu'exige le sciage de ce nœud, la scie franchira l'obstacle en se ralentissant, et reprendra ensuite sa vitesse primitive, mais si la puissance vive de la scie est insuffisante elle s'arrêtera. L'ouvrier averti par cette interruption, pourra, en appuyant sur le rouleau de tension, communiquer à la scie l'augmentation de pression nécessaire pour vaincre l'obstacle sans danger de rompre la scie.

Si l'on veut que l'opérateur ne puisse ni s'arrêter ni se ralentir, il faut substituer aux courroies des engrenages. Dans ce dernier dispositif, la puissance vive acquise par tout le système sert à vaincre un accroissement passager de résistance, sans diminution notable de la vitesse.

On pourrait arriver au même but en augmentant la tension des courroies sans fin, mais il en résulte un inconvénient grave : c'est de produire un frottement quelque fois considérable sur les tourillons des arbres tournants.

Si l'on ne veut pas augmenter outre mesure la tension de la courroie, il faut du moins que la machine à laquelle elle communique le mouvement possède par sa masse et sa vitesse une puissance vive assez grande pour que l'accroissement momentané du travail résultant influe peu sur la vitesse de cette machine. Ces considérations se rattachent à la théorie des volants exposée dans le chapitre suivant.

Chap. 5. *Du mouvement varié des corps solides assujettis à tourner autour d'axes fixes.*

§: 1 Calcul de l'accélération angulaire.

236. Des forces extérieures F agissent sur un corps solide, dont la vitesse angulaire à un certain instant est ω et prend après un temps très court dt une autre valeur $\omega + d\omega$.

La quantité $\frac{d\omega}{dt}$ est *l'accélération angulaire* qu'il s'agit de déterminer.

Soit M (fig. 71) un point ayant une masse m, et situé à une distance r de l'axe de rotation Oz. Sa vitesse à l'instant considéré est ωr ; et son accélération est $\frac{r\,d\omega}{dt}$. Ce point se meut donc comme si, étant libre, il était soumis à l'action de deux forces, l'une φ tangentielle à l'axe décrit, et égale à $m r \frac{d\omega}{dt}$, l'autre Ψ centripète et égale à $m \omega^2 r$.

Cela posé, concevons que sans rien changer aux forces actuelles, nous appliquions au point M quatre nouvelles forces, savoir φ et ψ ci-dessus définies, et $\underline{\varphi}$ et $\underline{\psi}$ égales et opposées au premières. Faisons de même pour tous les points du corps tournant ; rien ne sera altéré dans son mouvement ni dans les actions mutuelles de toutes ses parties.

Dans cet état, le point se meut comme s'il n'était sollicité que par les forces φ et ψ ; les autres forces F, φ et ψ, et les actions moléculaires relatives au point M se font donc mutuellement équilibre. Il en est de même pour tous les points matériels du corps solide.

Les forces F, φ et ψ relatives à tous ces points satisfont donc aux conditions générales de l'équilibre(*), et en particulier à l'équation du moment pris par rapport à l'axe Oz. Par rapport à cet axe le moment de chacune des forces ; ψ est nul, et il reste

$$\sum M\{F\}_z = \sum \varphi r \qquad \text{ou} \qquad \sum M\{F\}_z = \frac{\sum d\omega}{dt} . m r^2$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M\{F\}_z}{\sum m r^2}$$

attendu qu'à l'instant considéré l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ est commune à tous les éléments m du système solide.

Concluons que <u>l'accélération angulaire est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation divisée par le moment d'inertie du système par rapport à ce même axe</u>.

237. *Cas particulier*. Il peut arriver que $\sum M\{F\}_z$ soit nulle, comme lorsqu'un corps soumis à la seule action de la pesanteur tourne sans frottement autour d'un axe passant par son centre de gravité, ou autour d'un axe vertical quelconque. Le corps conserve alors sans variation le mouvement de rotation initial, puisque $\frac{d\omega}{dt}$ est constamment nul.

(*) Cette observation bien simple, étendue à tout système matériel, possédant un mouvement quelconque, constitue au fond <u>le principe général de dynamique de</u> D'Alembert.

Mais il n'en faut pas conclure que chaque point soit dans ce cas en équilibre dynamique ; il y a au contraire pour chaque point une force centripète résultante de toutes les forces qui agissent sur ce point ; et si, pour une vitesse angulaire donnée les actions moléculaires exercées sur un élément du système étaient insuffisantes pour produire cette résultante, il y aurait rupture entre cet élément et le reste du système.

§:2. Pression sur les appuis.

238. On peut se proposer de déterminer les pressions que supportent à chaque instant les appuis de l'axe de rotation, ou, ce qui revient au même, de rechercher les efforts que les appuis exercent sur le corps tournant.

Supposons que ces appuis consistent en deux anneaux A et A' (fig. 72) qui embrassent l'axe, et en un plan p qui s'oppose à la translation dans le sens de l'axe ; les efforts qu'il s'agit de calculer se réduiront à cinq forces parallèles à trois droites coordonnées Ox, Oy, Oz : savoir X, Y, composantes de la résistance de l'anneau A ; X', Y' forces analogues pour l'anneau A' et Z dirigées suivant l'axe. Ces forces doivent être comprises dans la désignation générale des forces extérieures F considérées au n° 236 ; mais si on restreint cette notation aux autres force extérieures, il faudra que les forces φ et ψ, satisfassent aux six conditions de l'équilibre :

1° Translation (fig. 73) . . . .
$$\sum F_x + X + X' + \sum \varphi \sin\alpha + \sum \psi \cos\alpha = 0$$
$$\sum F_y + Y + Y' - \sum \varphi \cos\alpha + \sum \psi \sin\alpha = 0$$
$$\sum F_x + Z = 0$$

2° Moments . . . . . en faisant $OA = \xi$, $OA' = \xi'$ et regardant comme positifs les moments des forces qui agissent dans le sens de l'accélération $\frac{d\omega}{dt}$

$$\sum M\{F\}_x - \sum \varphi\, r = 0$$
$$\sum M\{F\}_x + Y\xi + Y'\xi' - \sum x\,\varphi\cos\alpha + \sum x\,\psi\sin\alpha = 0$$
$$\sum M\{F\}_y + X\xi + X'\xi' + \sum x\,\varphi\sin\alpha + \sum x\,\psi\cos\alpha = 0$$

Mais en observant que l'on a (fig. 73)

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{y}{r} \quad , \quad \varphi = m\,r\,\frac{d\omega}{dt} \quad , \quad \psi = m\,\omega^2\,r$$

ces six équations peuvent s'écrire

$$\sum F_x + X + X' + \frac{d\omega}{dt}\sum m\,y + \omega^2 \sum m\,x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

$$\sum F_y + Y + Y'' + \frac{d\omega}{dt}\sum m\,y + \omega^2 \sum m\,y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

$$\sum F_x + Z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [3]$$

$$\sum M\{F\}_x - \frac{d\omega}{dt}\sum m\,r^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [4]$$

$$\sum M\{F\}_y + Y\xi + Y'\xi' - \frac{d\omega}{dt}\sum m\,x\,z + \omega^2 \sum m\,y\,x = 0 \quad \ldots\ldots [5]$$

$$\sum M\{F\}_x + X\xi + X'\xi' + \frac{d\omega}{dt}\sum m\,y\,x + \omega^2 \sum m\,y\,x = 0 \quad \ldots\ldots [6]$$

L'équation [4] est celle qui a servi, au n° 236, à déterminer l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$; les cinq autres serviront à déterminer les cinq moments *X, Y, X′, Y′,* et *Z*.

239. Si l'on veut se servir de ces équations pour un instant déterminé, on peut choisir le plan *zOx* de manière qu'il passe par la position du centre de gravité du système à cet instant. Dans ce cas on a $\sum m\,y = 0$; et si l'on désigne par a la distance du centre de gravité à l'axe *Ox*, par M la masse totale du corps, il en résulte $\sum m\,x = M\,a$, et l'on obtient

$$\sum F_x + X + X' + \omega^2 M\,a = 0 \quad \ldots\ldots [1\text{ bis}]$$

$$\sum F_y + Y + Y' - \frac{d\omega}{dt} M\,a = 0 \quad \ldots\ldots [2\text{ bis}]$$

On peut remarquer que $\omega^2 M\,a$ est l'expression de la force centrifuge et $\frac{d\omega}{dt} M\,a$ celle de la force tangentielle, qui correspondrait à la masse M, supposée concentrée au centre de gravité sans rien changer au mouvement de rotation.

On voit par l'équation [3] que la pression Z dans le sens de l'axe est la même pendant le mouvement que si le système était en repos. Il n'en est pas de même des sommes $X + X'$ et $Y + Y'$; la première, d'après l'équation [1 bis] dépend de la vitesse angulaire actuelle ω , et la seconde, d'après l'équation [2 bis] dépend de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$.

240. 1° Application des formules précédentes à un corps tournant autour d'un axe vertical (celui des *x*), sans l'action de la pesanteur et d'un ou plusieurs couples horizontaux.

On a dans ce cas $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_x = P = M\,g$,
$\sum M\{F\}_x = 0$, $\sum M\{F\}_y = 0$

Par suite les équations [1 bis], [2 bis], [3], [4], [5] et [6] deviennent

$$X + X' + \omega^2 M\,\alpha = 0$$

$$Y + Y' - \frac{d\omega}{dt} M\,\alpha = 0$$

$$M\,g + Z = 0$$

$$\sum\{F\}_x - \frac{d\omega}{dt}\sum m\,r^2 = 0$$

$$Y\xi + Y'\xi' + \omega^2 \sum m\,y\,\alpha - \frac{d\omega}{dt}\sum m\,x\,\alpha = 0$$

$$X\xi + X'\xi' + \omega^2 \sum m\,x\,\alpha - P\,a = 0$$

Si l'on voulait que les pressions *X, X′, Y, Y′* horizontales fussent nulles il faudrait non seulement qu'on eut $a = 0$ c'est à dire que l'axe de rotation passât par le centre de gravité, mais qu'on eut encore $\sum m\,y\,\alpha = 0$ et $\sum m\,x\,\alpha = 0$.

Cette considération explique comment une meule de moulin à farine peut être horizontale dans l'état de repos et perdre cette situation quand elle tourne, et les deux dernières formules indiquent le moyen de corriger ce défaut en introduisant dans les trous verticaux des masses métalliques dont on réglerait expérimentalement la situation.

2° Autre application, à un corps soumis uniquement à la pesanteur et tournant autour d'un axe horizontal passant par son centre de gravité.

On a, en prenant l'axe des x horizontal, $F_x = 0$, $F_\alpha = 0$, $\sum F_y = P$, $a = 0$, $\sum M\{F\}_x = 0$, $\sum M\{F\}_y = 0$, $\sum M\{F\}_\alpha = 0$.

Par suite les équations ci-dessus désignées deviennent

$$X + X' = 0,\ P + Y + Y' = 0,\ Z = 0,\ \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$Y\xi + Y'\xi' + \omega^2 \sum m\, y\, \alpha = 0,\ X\xi + X'\xi' + \omega^2 \sum m\, x\, \alpha = 0$$

Dans ces deux cas, les formules se simplifieraient beaucoup si les sommes $\sum m\, y\, \alpha$, $\sum m\, x\, \alpha$, étaient nulles ;

La condition dont il s'agit se trouve approximativement remplie dans un cas très fréquent en pratique, celui où le corps est à peu près symétrique par rapport au plan yOx perpendiculaire à l'axe de rotation. En effet à tout point matériel dont les coordonnées sont x, y, α, correspond alors un autre point pour lequel x et y sont les mêmes, et α égal et de signe contraire. Pour ces deux points les produits de $m\, x\, \alpha$ sont donc égaux et de signes contraires ainsi que les produits $m\, y\, \alpha$; donc les sommes $\sum m\, y\, \alpha$ et $\sum m\, x\, \alpha$ sont nulles comme composées d'élément qui se détruisent deux à deux.

D'ailleurs le plan yOx passe alors entièrement par le centre de gravité.

Dans le premier exemple on a alors $Y\xi + Y'\xi' = 0$ et comme on a aussi $Y + Y' = 0$, il en résulte $Y = 0$ et $Y' = 0$, et il reste pour déterminer les pressions X et X' les équations

$$X + X' + \omega^2 M\, \alpha = 0,\ X\xi + X'\xi' - P\,\alpha = 0$$

Dans le second exemple, on a

$$X = 0,\ X' = O,\ Y\xi + Y'\xi' = 0 \quad \text{et} \quad Y + Y' + P = 0\ ;$$

ces deux dernières équations réunies prouvent que les forces Y et Y' ont leurs résultantes égales et opposées au poids P. La condition $Y\xi + Y'\xi' = 0$ est satisfaite par $\xi = 0$ et $\xi' = 0$; c'est à dire que l'axe peut n'avoir qu'un seul point d'appui, qui doit alors être situé au centre de gravité. Si ξ et ξ' ne sont pas nulles, elles sont inégales, car si l'on avait $\xi = \xi'$, l'équation $\xi Y + \xi Y' = 0$ ou $\xi(Y + Y') = 0$ serait incompatible avec $Y + Y' + P = 0$.

241. En général, lorsque le corps est symétrique par rapport à un plan passant par le centre de gravité, et perpendiculaire à l'axe de rotation, les équations [5] et [6] du n° 238 se simplifient. Les six équations réunies sont, dans ce cas,

$$\sum F_x + X + X' + \omega^2 M\, \alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

$$\sum F_y + Y + Y' - \frac{d\omega}{dt} M\, \alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

$$\sum F_\alpha + Z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [3]$$

$$\sum M\{F\}_z - \frac{d\omega}{dt}\sum m r^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [4]$$

$$\sum M\{F\}_x + Y\xi + Y'\xi' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [5]$$

$$\sum M\{F\}_y + X\xi + X'\xi' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [6]$$

§: 3. *Du centre de percussion.*

242. On suppose que les forces F se réduisent à une seule, et l'on demande à quelles conditions elle doit satisfaire pour que les pressions X, Y, X', Y' et Z soient nulles.

Dans cette supposition, l'équation [3] du n° précédent donne $F_x = 0$ c'est à dire que la force F doit agir dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation.

Les équations [5] et [6] donnent

$$M\{F\}_x = 0 \qquad \text{et} \qquad M\{F\}_y = 0$$

c'est-à-dire que la force doit agir dans le plan xOy passant par le centre de gravité.

L'équation [1] se réduit à $F_x + \omega^2 M\alpha = 0$. Elle devient simplement $F_x = 0$ si le corps part du repos ; c'est à dire que dans ce cas la force F doit être perpendiculaire à l'axe Ox ; d'où il résulte $F_y = F$.

Les équations [2] et [4] déterminent la situation de F. Soit l la distance de l'origine au point où la force F coupe la droite Ox passant par le centre de gravité ; l'équation [4] devient $Fl - \frac{d\omega}{dt}\sum m r^2 = 0$ et l'équation [2] se réduit à $F - \frac{d\omega}{dt} M\alpha = 0$.

En éliminant $\frac{d\omega}{dt}$ entre ces deux équations on obtient

$$l = \frac{\sum m r^2}{m\alpha}.$$

Cette longueur, indépendante de l'intensité de la force F, est celle que l'on trouve dans l'étude du pendule composé pour la distance de l'axe de suspension au centre d'oscillation corrélatif. Ce point, par lequel doit passer la force F, pour que les appuis n'éprouvent aucune pression, porte le nom de centre de percussion.

243. *Exemple*. Si le corps est une barre droite, très étroite, d'une longueur λ, et que l'axe de rotation soit situé à l'une de ses extrémités on a

$$l = \frac{2}{3}\lambda$$

Réciproquement si la distance de l'axe de rotation à l'une des extrémités est le tiers de la longueur, le centre de percussion est situé à l'autre extrémité.

Cette théorie explique un fait bien connu : si l'on serre fortement une barre dans la main pendant que cette barre reçoit un choc, on sent une secousse, à moins que le point choqué ne soit voisin du centre de percussion relatif à un axe qui passerait par le milieu de la main.

§: 4. *Pendule balistique.*

244. Un corps au repos, suspendu à un axe horizontal fixe A (fig. 77) est supposé choqué par un autre corps de petites dimensions, dont la masse est μ et la vitesse v, dirigée dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation ; la nature des deux corps est telle qu'ils restent unis après le choc. On demande l'accélération angulaire du système à l'instant final du choc.

Pendant la durée très courte du choc, le corps choquant éprouvera de la part du corps choqué une pression variable F ; et si l'on appelle u la vitesse commune des deux corps en B à l'instant final du choc, en supposant cette vitesse de même direction que la vitesse v, ce qui revient à dire que la vitesse v est perpendiculaire à AB, on aura

$$\mu v - \mu u = \int F\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

cette intégrale étant prise pour la petite durée du choc, comme des durées infiniment petites dt.

Or des forces égales aux valeurs successives de F agiront sur le corps choqué pendant les mêmes durées infiniment petites dt . . . . . la pesanteur étant une force négligeable, dans le cas qui nous occupe, vis-à-vis des réactions F développées par le choc, on pourra, pendant la durée du choc, faire abstraction de cette force. En appelant ω la vitesse angulaire variable du système pendant le choc et en désignant par h la distance BA, on aura (236)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{F h}{\sum m r^2}$$

d'où

$$\omega' = \frac{h}{\sum m r^2} \int F\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

en appelant ω' la vitesse angulaire à l'instant final du choc, où les corps choquant et choqué ont la même vitesse u.

De [1] et [2] en remarquant la relation $u = \omega' h$ on conclut

$$\omega' = \frac{h}{\sum m r^2}\left(\mu v - \mu h \omega\right) \qquad \text{d'où} \qquad \omega' = \frac{h \mu v}{\sum m r^2 + \mu h^2} \quad \ldots [\,3\,]$$

Ce qu'on peut exprimer en disant que la vitesse angulaire du système, à la fin du choc, est égale au moment de la quantité de mouvement du corps choquant avant le choc, par rapport à l'axe de suspension divisé par le moment d'inertie du système total après le choc, par rapport à ce même axe.

245. Si l'on connaît toutes les quantités qui entrent dans l'équation [3], à l'exception de la vitesse v du corps choquant avant le choc, on pourra en conclure celle-ci, par la relation

$$v = \frac{\omega}{h \mu}\left(\sum m r^2 + \mu h^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,4\,]$$

Pour appliquer cette formule au pendule balistique, désignons par I la quantité $\sum m r^2 + \mu h^2$ ou le moment d'inertie du système formé par la réunion des deux corps après le choc. La puissance vive possédée par le système après le choc sera $\frac{1}{2}\omega^2 + I$, et à cet instant le centre de gravité du pendule se trouve encore très peu écarté de la verticale passant par l'axe

de suspension. Mais, dans la première oscillation que fera le système, ce centre de gravité s'élèvera d'une certaine hauteur H qu'on peut observer. Et si l'on désigne par P le poids du pendule et du corps choquant qui s'y est réuni, le travail de la pesanteur depuis l'instant final du choc jusqu'à l'instant de la plus haute élévation du centre de gravité sera $P\,H$; et puisque la puissance vive à ce dernier instant est nulle on a

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\,I = P\,H \qquad \text{d'où} \qquad v = \frac{\omega\,I}{h\,\mu} = \frac{1}{h\,\mu}\sqrt{2\,I\,P\,H}$$

246. On peut déterminer I par un procédé expérimental. Si T est la durée d'une petite oscillation du pendule, on a $T = \Pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ formule dans laquelle l est la longueur du pendule simple qui oscille comme le pendule composé que l'on considère ; on a donc

$$l = \frac{I}{M\,a}$$

M étant la masse du pendule et a la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension.

Si l'on écrit $\frac{P}{g}$ à la place de M, il vient $l = \frac{I\,g}{P\,a}$ et par suite

$$T = \Pi\sqrt{\frac{I}{P\,a}} \qquad \text{d'où} \qquad I = \frac{P\,a\,T^2}{\Pi^2}$$

puis enfin

$$v = \frac{P\,T}{\Pi\,h\,r}\sqrt{h\,a\,H}$$

247. Pour que l'axe de suspension n'éprouve aucune secousse, il faut que la direction du choc passe par le centre de percussion ; on doit donc avoir en supposant le point B très rapproché du plan passant par l'axe A et par le centre de gravité

$$\tau = \frac{\sum m\,r^2}{M'\,a}$$

M' désignant ici la masse du pendule avant sa réunion avec le corps choquant. On déterminera cette quantité τ en faisant osciller le pendule avant l'expérience du choc. Pour cela, T' étant la durée des petites oscillations, on aura

$$T' = \Pi\sqrt{\frac{\tau}{g}} \qquad \text{d'où} \qquad \tau = \frac{g\,T'^2}{\Pi^2}\,.$$

Si l'on réussit à introduire le corps choquant à cette distance τ de l'axe de suspension, et dans une position très rapprochée du plan mené par l'axe et par le centre de gravité du pendule avant le choc les deux temps T et T' des oscillations avant et après le choc seront sensiblement égaux.

§: 5. Pressions mutuelles des corps tournants dans le mouvement varié.

248. Soient deux corps qui tournent, l'un autour de l'axe A, l'autre autour de l'axe A'. Ils sont sollicités, l'un par la force P, l'autre par la force Q, et d'ailleurs liés entre-eux par une corde BB' enroulée sur des cylindres dont les axes sont A et A', et les rayons R et R'.

Si la liaison avait lieu par un engrenage, la tension T de la corde BB' serait remplacée par la pression mutuelle des dents en contact.

Cela posé, on suppose que, dans le mouvement de rotation des deux corps, dont l'un entraîne l'autre, le travail positif ou moteur de Q ne soit pas égal au travail négatif ou résistant de P ; que par conséquent le mouvement soit varié ; et l'on demande l'intensité de la tension T.

Si $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\omega'}{dt}$ sont les accélérations angulaires des deux corps, $\sum m r^2$ et $\sum m' r'^2$ leurs moments d'inertie par rapport aux axes de rotation A et A', p et q les bras de levier des forces P et Q, on aura (n° 236)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{T R - P p}{\sum m r^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{Q q - T R'}{\sum m' r'^2}$$

De plus les points B et B' ont la même vitesse, et par suite la même accélération ; on donc $R\omega = R'\omega'$, ou en différenciant et mettant pour $d\omega$ et $d\omega'$ leurs valeurs,

$$R \cdot \frac{T R - P p}{\sum m r^2} = \frac{Q q - T R'}{\sum m' r'^2}$$

équation d'où l'on tire

$$T = \frac{P p R \cdot \sum m' r'^2 + Q q R' \sum m r^2}{R^2 \sum m' r'^2 + R'^2 \sum m r^2}$$

249. Pour simplifier cette expression, remplaçons la force P par une force P_1 tangente au cylindre dont le rayon est R_1 et capable de produire le même travail ; remplaçons de même la force Q par une force équivalente Q_1 tangentielle au cylindre dont le rayon est R' ; soient de plus M et M' deux masses qui réunies en deux anneaux de rayons R et R', auraient les mêmes moments d'inertie que les deux corps proposés ; nous aurons

$$P p = P_1 R \;;\; Q q = Q_1 R' \;;\; \sum m r^2 = M R^2 \;;\; \sum m r^2 = M' R'^2 \;;$$

et, à l'aide de ce valeurs l'expression de T deviendra

$$T = \frac{M' P_1 + M Q}{M' + M} \quad (*)$$

(*) Je dois à M. Coriolis l'idée de cette transformation de la tension en pression T, dont l'expression devient ainsi facile à énoncer en langage ordinaire.

La même formule s'étend à un nombre quelconque de corps tournants liés entre-eux par des cordes ou des engrenages.

Soient par exemple fig. 79 quatre treuils tournant autour des axes A, B, C, D ; et soit T la tension de la corde $E F$ qui lie le deuxième treuil au troisième.

Considérant pendant un temps très court Θ le système des deux premiers treuils, comme soumis aux deux seuls forces extérieures T et P, on a pour cette durée l'équation de l'effet du travail :

$$\mathrm{T}\{T\} - \mathrm{T}\{P\} = \frac{1}{2}\sum m v^2 - \frac{1}{2}\sum m v_0^2$$

le second membre de cette équation étant étendu à tous les points matériels des deux treuils A et B.

Soit P_1 la force qui ferait le même travail que P si elle était appliquée en E au second treuil tandis que P l'est au premier.

Soit M la masse qui, si elle était concentrée au même point E, ou distribuée sur la circonférence passant par ce point, aurait la même puissance vive que le système des deux treuils A, B.

Soit σ le chemin décrit pendant le temps Θ par le point E et par tous les points de la corde $E F$.

Soit enfin u_0 et u les vitesses de E aux deux instants extrêmes du temps Θ.

Par les mêmes substitutions les expressions des accélérations angulaires deviennent

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{T - P_1}{M R} \quad \text{et} \quad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{Q_1 - T}{M' R'}$$

Dans le cas où Q_1 est égal à P_1, on trouve $T = P_1 = Q_1$, et par suite $\frac{d\omega}{dt} = 0$ et $\frac{d\omega'}{dt} = 0$ c'est-à-dire que le mouvement est uniforme.

Dans le cas où Q_1 est différent de P_1, soit $Q_1 = P_1 + Q_2$; il en résulte

$$T = P_1 + \frac{M Q_2}{M' + M} = P_1 + Q_2 \frac{1}{\frac{M'}{M} + 1}$$

et par suite les accélérations angulaires sont positives ou négatives selon que Q est plus grand ou plus petit que P_1, ce qui est manifeste à priori mais on conclut en outre de cette valeur de T que si l'une des forces Q ou P supposées d'abord en équilibre, comme elles doivent l'être pour l'uniformité du mouvement, vient à recevoir un accroissement considérable, ordinairement de peu de durée, il importe que le moment d'inertie du corps auquel cette force est appliquée soit le plus grand possible par rapport à celui de l'autre corps, si l'on veut que la tension T éprouve peu de variation.

250. Cette théorie est applicable au choix de l'emplacement des volants sur les arbres : ces pièces possédant de grands moments d'inertie doivent être rapprochées des points d'application des forces susceptibles d'accroissement considérable et de courte durée.

§: 6. Des volants.

251. Une machine composée de pièces solides tournantes, liées entre elles par des engrenages ou des cordes sans fin, peut avoir en chacun de ses volants matériels un mouvement uniforme ; il faut et il suffit pour cela que la somme de travail moteur pendant un temps quelconque soit constamment égale à la somme de travail résistant pendant le même temps.

Lorsque cette égalité n'a pas lieu pour des durées égales quelconques, elle peut néanmoins exister pour certaines périodes ; alors les vitesses variables redeviennent périodiquement les mêmes.

Si v_0 est, à un certain instant, la vitesse d'une masse élémentaire m du système ; et si elle devient v après un intervalle quelconque de temps, τ_m étant pour ce même intervalle de

---

On aura $\mathrm{T}\{P\} = P_1 \sigma$; $\mathrm{T}\{T\} = T \sigma$; $\frac{1}{g}\sum m v^2 - \frac{1}{g}\sum m v_0^2 = \frac{1}{g} M \left(u^2 - u_0^2\right)$
valeurs dont la substitution dans l'équation précédente donne $\sigma (T - P) = \frac{1}{g}\left(u^2 - u_0^2\right) M$.

En appelant de même Q_1 la force équivalente à Q mais appliquée en E et M la masse qui concentrée en F aurait la même puissance vive que les deux treuils C D, on aura

$$\sigma (Q_1 - T) = \frac{1}{g}\left(u^2 - u_0^2\right) M' .$$

Or les deux dernières équations donnent $\frac{Q_1 - T}{M'} = \frac{T - P}{M}$ d'où $T = \frac{M' P_1 + M Q_1}{M + M'}$ formule générale qu'il s'agissait d'établir. Il sera aisé de calculer les quantités P_1, Q_1, M, M' quand on connaîtra les forces P, Q, leurs distances aux axes A, D, leurs moments d'inertie des treuils par rapport à leurs axes, et enfin les rayons des roues d'engrenage des treuils ou les rayons des cylindres auxquels les cordes de communication sont tangentes.

temps le travail moteur des forces qui agissent sur la machine, et τ_r la valeur absolue du travail résistant, on a (39)

$$\sum \frac{1}{2} m v^2 - \sum \frac{1}{2} m v_0^2 = \tau_m - \tau_r$$

équation dans laquelle les quantités $\sum \frac{1}{2} m v_2$, τ_m et τ_r sont des variables dépendantes du temps écoulé depuis l'instant initial.

Si l'on suppose que τ_m croisse d'abord plus rapidement que τ_r dans les premiers temps qui suivent l'instant initial, les vitesses v croîtront, et la plus grande valeur de $\sum \frac{1}{2} m v^2$ répondra à la plus grande valeur de $\tau_m - \tau_r$ si au contraire c'est τ_r qui commence par l'emporter, les vitesses v diminueront, et le minimum de $\sum \frac{1}{2} m v^2$ répondra au maximum de $\tau_r - \tau_m$, ou de la valeur absolue de la différence entre le travail résistant et le travail moteur.

L'instant ou cette différence est un maximum et celui où son accroissement est nul pour un temps infiniment petit c'est à dire que c'est l'instant où le travail moteur élémentaire est égal au travail élémentaire résistant ; en d'autres termes encore, c'est l'instant où les forces satisfont aux conditions d'équilibre.

De là un moyen d'établir une relation entre la plus grande et la plus petite vitesse angulaire d'une des pièces tournantes, lorsque les forces sont connues pour toutes les positions du système.

252. *Premier exemple* : Manivelle à simple effet (fig. 80).

Une roue ayant son centre de gravité dans l'axe O, est soumise à deux forces : l'une P, résistante, agit constamment à l'extrémité du bras de levier $DO = a$; l'autre Q, mouvante, appliquée au bouton B d'une manivelle dont le rayon est $OB = b$ agit dans une direction constamment verticale, mais seulement en descendant.

Pour que le mouvement soit périodiquement uniforme, il faut que l'on ait au bout d'une révolution entière

$$\tau \{ P \} = \tau \{ Q \} \quad \text{ou} \quad P\ 2\ \Pi\ \alpha = Q\ .2\ b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\ 1\ ]$$

A partir de l'instant où le bouton est en A, le travail moteur est d'abord plus petit que le travail résistant, car les travaux élémentaires sont proportionnels aux moments (28), et quand le bouton est en A le moment de Q est nul. Depuis cet instant les vitesses diminuent jusqu'à l'instant où les forces P et Q satisfont aux conditions d'équilibre. Soit x l'angle $B'OE$ que fait alors le rayon de la manivelle avec l'horizontale, on aura

$$P\ \alpha = Q\ b \cos x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\ 2\ ]$$

Ces équations [1] et [2] donnent $\cos x = \frac{1}{\Pi}$ d'où $\log \cos x = -\log \Pi = 0{,}4971499 = \bar{1}\ ,5028501$ et $x = 71^\circ\ 26^\circ\ ,4$

Le point B'', où le moment de Q, après avoir dépassé celui de P, lui redevient égal, est sur la même verticale que B'. Ainsi les vitesses sont à leur minimum quand le bouton de la manivelle est en B', et à leur maximum quand il est en B''.

Soient ω' et ω'' les valeurs de la vitesse angulaire à ces deux instants, on aura, en vertu du théorème de l'effet de travail,

$$\frac{1}{2}\omega''^2 \sum m^2 - \frac{1}{2}\omega'^2 \sum m\,r^2 = Q \times B'B'' - P \times arc\, M'EM''$$

or $$B'B'' = 2\,b \sin x = 0{,}94799 \,.\, 2\,b$$

$$M'EM'' = 2\,\Pi\,\alpha\,\frac{71°\,26',4}{180} = 2\,\Pi\,\alpha\,\frac{4286{,}4}{10{,}800} = 0{,}3989 \,.\, 2\,\Pi\,\alpha$$

substituant, en ayant égard à l'équation [1], il vient

$$\frac{1}{2}\left(\omega''^2 - \omega'^2\right)\sum m\,r^2 = 0{,}5511 \,.\, 2\,b\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

relation qui permet de calculer quel doit être le moment d'inertie $\sum m\,r^2$ de la roue pour que la différence des vitesses extrêmes ω'' et ω' (laquelle peut être regardée comme différant très peu de la vitesse angulaire moyenne de la roue, déduite du nombre de tours qu'elle accomplit dans une minute). Imposons-nous la condition que la différence $\omega'' - \omega'$ soit au plus $\frac{1}{R}$ de cette moyenne ; nous aurons

$$\frac{1}{2}(\omega'' - \omega') = W \qquad \text{et} \qquad \omega'' - \omega' = \frac{W}{R}$$

d'où $$\frac{1}{2}\left(\omega''^2 - \omega'^2\right) = \frac{W^2}{R}$$

et par suite $$\frac{W^2}{R}\sum m\,r^2 = 0{,}5511 \,.\, 2\,b\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,4\,]$$

De cette relation on déduira $\sum m\,r^2$ en fonction de W, de n, et du travail $2\,bQ$ que la force mouvante développe à chaque tour.

253. Si l'on suppose que la masse de la roue puisse être considérée comme réunie dans un anneau dont le poids soit Π, la vitesse moyenne W, et le rayon R, on aura

$$w = \frac{W}{R} \qquad \text{et} \qquad \sum m\,r^2 = \frac{\Pi}{g}R^2$$

d'où $$w^2 \sum m\,r^2 = \frac{\Pi\,W^2}{g}$$

l'équation [4] donne ainsi

$$\Pi\,W^2 = 0{,}5511 \,.\, 2\,b\,Q \,.\, gn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,5\,]$$

Soit M le nombre de tours de la manivelle par minute, et N le nombre de chevaux exprimant le travail indéfiniment prolongé de la force Q ; le travail par seconde sera exprimé à la fois par $\frac{2\,b\,Q\,M}{68}$ et par $75\,N$

d'où $2\,b\,Q = 4.500\,\frac{N}{M}$; et l'équation [5] se réduit à

$$\Pi\,W^2 = 24300\,\frac{n\,N}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,6\,]$$

254. *2^e Exemple*. Manivelle à double effet. La force Q, d'intensité et de direction constante, agit de haut en bas dans la demi-circonférence $AB'BA''$ et de bas en haut dans l'autre demi-circonférence que le bouton décrit en remontant.

Le mouvement devant être périodiquement uniforme, il faut qu'on ait pour une révolution entière

$$\mathrm{T}\{P\} = \mathrm{T}\{Q\} \qquad \text{ou} \qquad P \,.\, 2\,\Pi\,\alpha = Q \,.\, 4\,b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;[\,7\,]$$

et il en résulte que le mouvement est aussi périodiquement uniforme par demi-révolutions ; car dans chacune d'elles le travail résistant est $P\,\Pi\,\alpha$ et le travail moteur $Q\,2\,b$, quantité égale d'après l'équation [7]

Les points B' et B'', ou B'' et B^{IV}, position du bouton quand les vitesses sont au minimum et au maximum, se déterminent aussi par l'équation

$$P\,\alpha = Q\,b\,\cos x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;[\,8\,]$$

Les conditions [7] et [8] donnent

$$\cos x = \frac{2}{\Pi}, \qquad \text{d'où} \qquad x = 50\,^\circ \,.\, 27\,' \,,\, 6$$

On trouvera, en opérant comme au n° 252 et en ayant égard à la relation [7]

$$\frac{1}{2}\left(\omega\,''^2 - \omega\,'^2\right)\sum m\,r^2 = Q \,.\, 2\,b\,\sin x - P\;2\,\Pi\,\alpha \,.\, \frac{50\,^\circ\,27\,'\,6}{180} = Q\;2\,b\,(0{,}7712 - 0{,}5607) = 0{,}2105 \,.\, 2\,b\,Q$$

et en conservant à ω et à n leurs significations,

$$\frac{w^2}{n}\sum m\,r^2 = 0{,}2105.\;2\,b\,Q$$

255. Π, W M et N ayant de même les significations du n° 253

on aura $\quad W^2\sum m\,r^2 = \dfrac{\Pi\,W^2}{g} \quad$ et $\quad \dfrac{4\,b\,Q\,M}{60} = 75\,N$

et finalement

$$\Pi\,W^2 = 4645\,\frac{n\,N}{M} \;.\;[\,9\,]$$

256. Application à une machine à vapeur citée par M. Morin.

Rayon du volant $R = 3^m{,}05$; $\quad M = 19 \quad$ d'où $\quad W = \frac{2\,\Pi\,R\,.\,19}{60} = 6{,}06$

$N = 35$, $\quad n = 40$, $\quad$ d'où $\quad \Pi = 9320^{Kil.}$

257. *3^e Exemple.* Manivelle à simple effet mais à contrepoids (fig. 81)

En un point K diamétralement opposé au bouton B, et à une distance quelconque c est fixé un corps dont le poids C, tel qu'on ait $Cc = \frac{1}{2}\,Q\,b$.

Il en résulte que, pendant la descente du bouton, la moitié du travail de Q est détruit par celui de C ; mais dans la demi-révolution suivante, la force Q n'agissant plus et le corps K descendant, son poids C restitue la moitié du travail de Q, qu'il avait neutralisé pendant la première demi-révolution.

Le mouvement est donc le même que dans le cas de la manivelle simple à double effet, et par conséquent la formule des n^os^ 254 et 255 sont celles qu'il convient d'appliquer.

On observera que si Π ne comprends pas le poids C, il faut en appelant v la vitesse moyenne de ce corps additionnel, ou de ce poids, poser l'équation

$$\Pi W^2 + C v^2 = 4645 \frac{n N}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [10]$$

258. *Remarque.* Les formules [6], [9] et [10] sont applicables au cas où le volant ne serait pas sur l'arbre de la manivelle même, pourvu que M soit toujours le nombre de tours que fait la manivelle par minute, tandis que W et v seraient les vitesses propres de l'anneau du volant et du contre-poids C toujours diamétralement opposé au bouton de la manivelle.

259. *4^e^ Exemple*. Manivelle à double effet avec contre-poids. (fig. 82).

L'utilité du contre-poids pour la manivelle à simple effet fait naître la question de savoir si une disposition analogue ne serait pas avantageusement appliquée à une manivelle à double effet.

Évidemment dans ce dernier cas le contre-poids ne pourrait être fixé à l'arbre de la manivelle, car s'il venait au secours de la force mouvante Q, lorsque le bouton de la manivelle serait à l'un des points A, A' (appelés communément points morts), il deviendrait résistant quand le bouton serait à l'autre de ces points. Mais la question reçoit au contraire une solution affirmative si l'on place le contre-poids sur un arbre lié à celui de la manivelle par un engrenage de manière qu'il fasse deux tours pendant que la manivelle en fait un.

O étant l'axe de la manivelle, soit O' un axe parallèle lié au premier de manière qu'il ait une vitesse angulaire double.

Soit C le poids d'un corps ayant un centre de gravité à une distance c de l'axe O' et solidement fixé à cet axe de manière que lorsque le bouton de la manivelle est au point culminant A, le corps c est en H' sur l'horizontale $O'H'$ passant par O', et en train de descendre ; il en résulte que lorsque le bouton est en H sur l'horizontale OH, le corps c est en H'' sur le prolongement de l'horizontale $H'O'$, et en train de remonter. En général le poids C devient moteur quand le travail de Q est vers son minimum, et résistant dans le cas contraire. Il opère donc une régularisation temporaire du mouvement, qu'il sera facile de compléter par un volant.

Déterminons d'abord le point C, de manière que la somme algébrique du travail de Q et de C, pendant un même déplacement très petit, soit la même quand le bouton de la manivelle est dans les deux positions A, H, et par conséquent quand le corps C est dans les deux positions H', H''. Cette condition (en remarquant que le déplacement angulaire du rayon $O'C$ est toujours le double de celui OB) conduit à la relation

$$Cc = \frac{Q q}{2} - Cc \qquad \text{ou} \qquad Cc = \frac{1}{4} Q b \quad \ldots\ldots\ldots [1]$$

Cherchons maintenant les deux positions de la plus grande et la plus petite vitesse angulaire. Pour un demi-tour de la manivelle le corps c fait un tour entier ; le travail de son

poids est nul et le travail de Q est comme précédemment à cause de l'uniformité périodique du mouvement

$$Q \,.\, 2\,b = \frac{1}{2}\,\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

en appelant τ le travail résistant développé pendant un tour de manivelle par une force constante P que la machine est destinée à vaincre, et que nous supposerons appliquée à une roue fixée sur l'axe O'.

Soit B une situation du bouton où les forces Q, C et P sont en équilibre dynamique. Appelons x l'angle AOB et par conséquent $2\,x$ l'angle $H'O'C'$; ω la vitesse angulaire de la manivelle à cet instant, et par conséquent $2\,\omega$ la vitesse angulaire de C. Écrivons que le travail de Q plus celui de C pendant un temps infiniment petit θ est égal à celui de P pendant le même temps. Nous aurons

$$Q \sin x \cos\theta + C \cos 2\,x \,.\, \cos \omega\, c\, \theta = \tau \,.\, \frac{\omega\,\theta}{2\,\Pi}$$

ou en vertu des équations [1] et [2]

$$\sin x + \frac{1}{2}\cos 2\,x = \frac{2}{\Pi}$$

ce qui se change par $$\sin x + \frac{1}{2} - \sin^2 x = 0{,}636$$

d'où l'on tire deux valeurs de *sin x ;* savoir *0,163* et *0,837* et par conséquent quatre valeurs de l'angle x plus petites que *180° ;* savoir

$$x' = 9°\,23' \qquad x''' = 123°\,8'$$
$$x'' = 56°\,52' \qquad x^{IV} = 170°\,37'$$

Cela étant, en procédant comme précédemment (252 et 254) on aura

$$\frac{1}{2}\left(\omega''^2 - \omega'^2\right)\sum m\,r^2 = Q\,b\left(\cos x' - \cos x''\right) + C\,c\left(\sin 2\,x'' - \sin 2\,x'\right) - \tau\,\frac{x'' - x'}{360°}$$

$$\frac{1}{2}\left(\omega'''^2 - \omega''^2\right)\sum m\,r^2 = Q\,b\left(\cos x'' - \cos x'''\right) + C\,c\left(\sin 2\,x''' - \sin 2\,x''\right) - \tau\,\frac{x''' - x''}{360°}$$

$$\frac{1}{2}\left(\omega^{IV\,2} - \omega'''^2\right)\sum m\,r^2 = Q\,b\left(\cos x''' - \cos x^{IV}\right) + C\,c\left(\sin 2\,x^{IV} - \sin 2\,x'''\right) - \tau\,\frac{x^{IV} - x'''}{360°}$$

et en substituant les valeurs ci-dessus obtenues de x, de Cc, et de τ, [1] et [2], on trouvera

$$\frac{1}{2}\left(\omega''^2 - \omega'^2\right)\sum m\,r^2 = \quad 0{,}035\,.\,2\,b\,Q\,,$$

$$\frac{1}{2}\left(\omega'''^2 - \omega''^2\right)\sum m\,r^2 = -\,0{,}050\,.\,2\,b\,Q\,,$$

$$\frac{1}{2}\left(\omega^{IV\,2} - \omega'''^2\right)\sum m\,r^2 = \quad 0{,}036\,.\,2\,b\,Q\,;$$

d'où $$\frac{1}{2}\left(\omega'^2 - \omega^{IV\,2}\right)\sum m\,r^2 = -\,0{,}020\,.\,2\,b\,Q\,.$$

L'ordre de grandeur des vitesses angulaires est donc : ω''' , ω' , ω^{IV} , ω'' .

La plus grande variation a lieu entre la seconde et la troisième position d'équilibre dynamique ; et en faisant dans l'équation

$$\frac{1}{2}\left(\omega''^2 - \omega'''^2\right)\sum m\,r^2 = 0{,}050\ .\ 2\,b\,Q$$

les mêmes substitutions qu'aux n^{os} 252 et 255 savoir :

$$\frac{1}{2}\left(\omega''^2 - \omega'''^2\right) = \frac{W^2}{n}\,, \qquad W^2\sum m\,r^2 = \frac{\Pi\,W^2}{g} \quad \text{et} \quad 2\,b\,Q = \frac{2250\,N}{M} \qquad \text{on trouve}$$

$$\Pi\,W^2 = 1104\,\frac{n\,N}{M}\,.$$

C'est à dire que le quart de ce qu'indique la formule [9], n° 255, pour la manivelle à double effet.

260. Les questions analogues aux précédentes peuvent être résolues dans des cas plus compliqués, à l'aide de méthodes graphiques.

Supposons par exemple, qu'il s'agisse d'une machine à vapeur avec balancier lié par une bielle à la manivelle d'un volant.(*) Admettons 1° que l'on connaisse à chaque situation du piston la résultante F des pressions et des frottements qu'il subit. 2° que la résultante des poids des bielles et du balancier passe par l'axe de rotation de ce dernier, au moins dans leur situation moyenne, de sorte que le travail de la pesanteur sur le système en mouvement soit à peu près nul. 3° que le mouvement soit périodiquement uniforme, de manière qu'après chaque tour du volant et de la manivelle toutes les vitesses redeviennent les mêmes.

Cela posé prenons pour commencement d'une période l'instant où le piston est à l'une des extrémités de la course. Soit à cet instant ω_0 la vitesse angulaire de l'arbre de la manivelle.

En appelant b le rayon OB de la manivelle, (fig. 83) on pourra représenter la puissance vive du système à cet instant par

$$\frac{1}{2}\,\omega_0^2\,b^2\,M$$

en désignant par M une masse fictivement réunie sur le cercle dont le rayon est OB de même dans les cas où l'arbre de la manivelle est lié par des engrenages avec un ou plusieurs corps tournant autour d'axes passant par leurs centres de gravité respectifs.

Soit, à un autre instant, ω la vitesse angulaire de l'arbre de la manivelle, de sorte que la puissance vive des pièces tournantes devienne alors

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\,b^2\,M$$

Ajoutons-y la puissance vive que possèdent à cet instant le balancier et ses bielles. A cet effet appelons ω' la vitesse angulaire du balancier et admettons ce qui diffère peu de la vérité, que sa puissance vive des bielles, y compris le piston, soit la même que si leurs masses

(*) M. Coriolis a traité plus complètement cette question dans un mémoire inséré dans le journal de l'École Polytechnique.

étaient transportées aux points d'articulation de ces pièces avec le balancier. Dès lors la puissance vive variable du balancier et des bielles sera, à l'instant considéré, représentée par

$$\frac{1}{2}\,\omega'^{2}\,c^{2}\,M'$$

en appelant c le rayon AC joignant l'axe A de rotation du balancier au point C d'articulation ; et en désignant par M' une masse fictivement transportée à la distance AC de cet axe.

Si, de plus, on appelle τ_m et τ_r le travail moteur sur le piston et le travail résistant sur les pièces tournantes depuis l'instant initial on aura

$$\frac{1}{2}\left(\omega^{2}-\omega_{0}^{2}\right)b^{2}\,M+\frac{1}{2}\,\omega'^{2}\,C^{2}\,M'=\tau_m-\tau_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

Pour calculer approximativement le travail τ_m on peut admettre que la bielle DE du piston conserve sensiblement la même direction de sorte que le travail de la force F est le même que si cette force agissait tangentiellement à une circonférence ayant son centre en A. Soit r le rayon AD' de ce cercle pendant un temps infiniment petit dt le travail F sera

$$F\,\omega'\,r\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,2\,]$$

maintenant il y a une relation simple entre les vitesses ω et ω' : en effet la longueur BC étant constante, les vitesses des points B et C projetés sur BC sont égales : donc si on abaisse sur BC les perpendiculaires AM, ON on a

$$\omega'\,C\cos\widehat{CAM}=\omega\,b\cos\widehat{BON} \qquad \text{ou} \qquad \omega'\,AM=\omega\,.\,ON$$

Plus simplement si l'on mène OQ parallèle à AC et qu'on désigne OQ par q, on a

$$\frac{AM}{ON}=\frac{AC}{OQ}=\frac{c}{q} \qquad \text{et} \qquad \omega'=\omega\,\frac{q}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

de sorte que le rapport de ω à ω' varie proportionnellement à la seule variable q.

Il en résulte que la formule [2] peut être remplacée par

$$F\,\omega\,\frac{q\,r}{c}\,dt\,, \qquad \text{ou} \qquad F\,\frac{q\,r}{c\,b}\,\omega\,b\,dt\,, \qquad \text{ou} \qquad \frac{q\,r}{c\,b}\,F\,dx$$

en désignant par dx l'arc décrit par le point B pendant qu'a lieu l'élément du travail τ_m.
Donc enfin

$$\tau_m=\int_{0}^{x}\frac{q\,r}{c\,b}\,F\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,4\,]$$

en comptant l'arc x à partir du point mort qu'occupe B à l'instant initial. Cette intégrale peut se représenter et se calculer par l'aire d'une courbe en prenant pour abscisses les arcs x et pour ordonnées les valeurs de $\frac{r}{c\,b}\,.\,F\,q$, en vertu des variables F et q dépendantes de x.

La substitution de la formule [3] dans [1] donne

$$\frac{1}{2}\left(\omega^{2}-\omega_{0}^{2}\right)b^{2}\,M+\frac{1}{2}\,\omega^{2}\,q^{2}\,M'=\tau_m-\tau_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,5\,]$$

Dans cette équation τ_m est connu pour diverses valeurs de x ; il en est de même pour τ_r qui est ordinairement proportionnel à x. On peut maintenant comme précédemment, poser

$$\frac{1}{2}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \;<\; \frac{1}{n} W^2 .$$

Enfin on aura une grande approximation du terme $\frac{1}{2}\omega^2 q^2 M'$ en y remplaçant ω par la vitesse angulaire W de manière à n'y laisser que la variable q dépendant de x. Par là l'équation [5] donne

$$\frac{\tau_m - \tau_r - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 M'}{b^2 M} \;<\; \frac{1}{n} W^2 \qquad \text{ou} \qquad b^2 M \;>\; n \frac{\left(\tau_m - \tau_r - \frac{1}{2} W^2 q^2 M'\right)}{b^2 W^2}$$

En calculant la plus grande valeur du second membre, on aura le moment d'inertie du volant $M b^2$.

§: 7. *Des marteaux mus par des cames* (*)

261. ‹‹ On emploie dans les forges et dans les autres usines métallurgiques trois espèces de marteaux dont la forme et la proportion dépendent de l'usage auquel on les destine, savoir :

‹‹ 1° Les marteaux à bascule dits martinets, employés à l'étirage et au platinage des petits fers, au raffinage des aciers, à la fabrication des armes blanches et de divers outils ; le poids du marteau proprement dit varie de 80 à $40^{K.}$ et au dessous. ››

Il frappe ‹‹ de 200 à 400 coups par minute. La came agit sur l'extrémité des manches opposée à celle où est fixé le marteau et l'axe de rotation est entre ces deux points ››

‹‹ 2° Les marteaux à soulèvement dont la came soulève le manche entre le marteau et l'axe de rotation. On les nomme aussi gros marteaux, marteaux à l'allemande. Ils sont particulièrement employés à l'affinage du fer par la méthode allemande. Leur poids varie de 300 à $400^{K.}$ ››

Ils frappent de 70 à 200 coups par minute.

‹‹ 3° Les marteaux frontaux ainsi nommés parce que la came saisit l'extrémité du manche au-delà du marteau, par rapport à l'axe et dans le plan vertical de ce manche. Ils sont en usage dans les forges où l'on fabrique le fer à la méthode anglaise et pèsent 2500 à $4000^{K.}$ y compris le manche qui est en fonte. ››

Ils frappent de 60 à 100 coups par minute

‹‹ A cette classe se rapportent aussi la plupart des marteaux ou pilons employés au feutrage des laines ou à la préparation des chiffons pour la fabrication du papier ››

262. ‹‹ La théorie du mouvement de ces trois espèces de marteaux est la même, sauf quelques modifications à apporter aux formules relativement à la position de la came et du manche. . . . . Il arrive ordinairement dans tous les cas que le choc de la came contre le manche a lieu dans un plan horizontal passant par l'axe de rotation. Nous raisonnerons dans cette supposition, et nous distinguerons dans l'action des cames trois périodes : la première

(*) Le sujet de ce paragraphe est traité avec plus de développements et une plus grande exactitude dans le cours de mécanique de M. Poncelet à l'école de l'artillerie et du génie ; les passages indiqués par des guillemets sont textuellement extraits des feuilles lithographiées de ce cours, édition de 1836.

correspondant à la durée du choc et de la compression réciproque de la came et de la partie du manche sur laquelle elle agit ; la deuxième, qui commence à l'instant où finit le choc et dure jusqu'à celui où la came quitte le manche ; la 3è qui s'écoule entre le moment où la came a quitté le manche et celui où une autre vient le choquer. . . . . ››

263. ‹‹ A partir de l'instant où la came rencontre le manche il se développe aux points de contact des efforts de compression réciproques qui croissent jusqu'au moment où l'impression atteint son maximum. A cette limite les points de contact marchent avec la même vitesse ; au-delà la réaction des ressorts moléculaires tend à effacer plus ou moins l'impression et à augmenter la vitesse transmise au marteau en diminuant celle de la came. . . . . Mais d'une part la répétition et l'intensité des chocs altère l'élasticité du point en contact et de l'autre les dimensions générales du manche et de la came sont telles qu'ils fléchissent en réalité fort peu ; d'où il résulte qu'à la fin de la plus grande compression le manche et la came marchent sensiblement avec la même vitesse. C'est ce que confirme l'observation car dans aucun des cas de la pratique il n'est possible d'observer entre ces corps la moindre séparation. ››

264. Soit N la pression variable que le manche du marteau reçoit de la came à un instant quelconque de la période du choc.

Soit à ce même instant, $\frac{d\omega}{dt}$ l'accélération angulaire du marteau considéré comme un corps solide.

Cette accélération angulaire d'après la formule (256)

$$\frac{d\,\omega}{dt} = \frac{\sum M\,\{F\}}{\sum m\,r^2}$$

dépend des moments des diverses forces qui agissent sur le marteau, et par conséquent, non seulement de la force N mais encore de la pesanteur, et du frottement sur les tourillons. Mais le poids du marteau, quelque considérables qu'il soit, peut être négligé auprès de la force N qui a lieu aux points de contact pendant le choc. Il en est de même du frottement dont le moment est très petit par rapport à celui de N.

Soit R la distance du point de contact de la came et du marteau à l'axe de rotation de ce dernier.

Le moment de N par rapport à cet axe est RN, et l'équation précédente devient

$$d\,\omega = \frac{R}{\sum m\,r^2}\,N\,dt$$

d'où en intégrant et appelant ω la vitesse angulaire du marteau à la fin du choc

$$\omega = \frac{R}{\sum m\,r^2}\int N\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,1\,]$$

Pendant la même période, l'arbre à came est soumis à une force égale et contraire à N qu'il reçoit du marteau au point de contact de celui-ci avec la came. Il en résulte une accélération angulaire négative dont la valeur absolue que nous désignerons par $\frac{d\omega'}{dt}$ est égale au moment de la force N, par rapport à l'axe de rotation de l'arbre à came. Soit $R'\,N$ ce

moment ; R' étant le rayon du cercle primitif des cames. On a, en désignant par $\sum m' r'^2$ le moment d'inertie de l'arbre à came, par rapport à son axe de rotation

$$d\,\omega' = \frac{R'\,N\,dt}{\sum m' r'^2} \quad \text{d'où} \quad \omega'_0 - \omega' = \frac{R'}{\sum m' r'^2} \int N\,dt \quad \ldots\ldots [\,2\,]$$

ω'_0 et ω' étant les vitesses angulaires de l'arbre à came au commencement et à la fin du choc.

Les deux intégrales $\int N\,dt$ qui entrent dans les équations [1] et [2] sont égales parce qu'elles sont prises pour les mêmes valeurs de N et les mêmes limites du temps. Donc en éliminant $\int N\,dt$, on tire

$$\frac{\sum m\,r^2}{R} \,.\, \omega = \frac{\sum m' r'^2}{R'} \left(\omega'_0 - \omega'\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [\,3\,]$$

265. Soit u la vitesse de la came au commencement du choc et v sa vitesse à la fin de la même période ; v est aussi la vitesse du point de contact du manche à la fin du choc. On a donc

$$u = \omega'_0 R' , \qquad v = \omega' R' = \omega R$$

Faisons de plus pour simplifier

$$\sum m\,r^2 = M\,R^2 \qquad \text{pour le marteau,}$$
$$\sum m' r'^2 = M' R'^2 \quad \text{pour l'arbre à came ;}$$

de sorte que M et M' sont deux masses qui substituées à celles du marteau et de l'arbre à came et concentrées aux distances R et R' des axes respectifs de rotation, auraient les mêmes moments d'inertie relativement à ces axes. L'équation [3] devient ainsi

$$M\,v = M'(u - v) \quad \text{ou} \quad (M + M')\,v = M'\,u \quad \ldots\ldots\ldots [\,4\,]$$

absolument comme si un corps ayant la masse M' et la vitesse u choquait directement un corps en repos ayant la masse M et que v fût la vitesse commune à la fin du choc.

266. Connaissant la masse M fictive du marteau on peut déterminer M' de manière que la différence u - v des vitesses extrêmes n'excède pas une certaine fraction de la vitesse moyenne $\frac{u+v}{2}$

Soit $\frac{u+v}{2} = V$ et $u - v = \frac{V}{n}$ on en conclut $v = V\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ et l'équation [4] donne :

$$M\left(1 - \frac{1}{2\,n}\right) = M' \,.\, \frac{1}{n} \quad \text{d'où} \quad M' = \left(n - \frac{1}{2}\right) M \quad \ldots\ldots\ldots [\,5\,]$$

Suivant M. Poncelet, il est fort rare dans la pratique que M' ne soit pas au-dessus de *10M*. Pour les martinets à marteaux à soulèvement employés à la fabrication du fer on a au moins $M' = 12M$; et pour les marteaux frontaux au moins $M' = 30M$.

267. Calculons la puissance vive qui a été perdue par l'arbre à cames pendant la très courte durée du choc et qui doit lui être restituée par le moteur, pendant les deux périodes suivantes.

Au commencement du choc cette puissance vive est

$$\tfrac{1}{2}\,\omega'^2_0 \sum m' r'^2 \text{, ou } \tfrac{1}{2} M' u^2 \text{ à la fin elle est } \tfrac{1}{2} M' v^2$$

la diminution et par conséquent le travail correspondant que le moteur doit exercer est donc

$$\tau_1 = \frac{1}{2} M' \left(u^2 - v^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,6\,]$$

On ne peut observer ni l'une ni l'autre des vitesses u, v ; mais on admet que leur moyenne arithmétique diffère très peu de la vitesse moyenne des cames calculée au moyen du rayon R' et du nombre de tour que fait l'arbre dans un temps donné.

Soit donc $$\frac{u+v}{2} = V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,7\,]$$

cette relation combinée avec l'équation [4] permet de calculer en fonction de V, M et M' la valeur de $\frac{1}{2}(u^2 - v^2) = \frac{u+v}{2} . u - v = V\ (u - v) = V\ v\ \frac{M}{M'}$;

puis en éliminant u de [4] et [7] on trouve

$$v = \frac{2\,M'\,V}{2\,M' + M},$$

et l'on obtient enfin

$$\tau_1 = \frac{2\,M\,M'\,V^2}{2\,M' + M} \quad \text{ou} \quad \tau_1 = M\,V^2 . \frac{1}{1 + \frac{M}{2\,M}} \quad \ldots\ldots [\,8\,]$$

On a vu plus haut que le rapport $\frac{M}{M'}$ est plus petit que $\frac{1}{10}$ et quelquefois inférieur à $\frac{1}{30}$; ainsi le travail τ_1 diffère peu de MV^2, c'est à dire du double de la puissance vive qu'aurait le marteau si sa vitesse était calculé d'après la vitesse moyenne des cames. La moitié de ce travail est détruit par le travail résistant des actions moléculaires pendant le choc.

268. Calculons maintenant le travail nécessaire pour l'élévation des marteaux.

Appelons

P, le poids du marteau, de son manche et de ses ferrures ;

h, la hauteur dont s'élève le centre de gravité de cet ensemble jusqu'à l'instant où la came quitte le marteau (après quoi celui-ci continue de s'élever d'une quantité qui n'entre pas dans h) ;

y, le chemin sensiblement vertical que parcourt, jusqu'au même instant, le point de contact de la came et du marteau ;

N', l'effort exercé en ce point

La vitesse du marteau variant très peu pendant la seconde période on peut considérer les forces P, N' et le frottement sur les tourillons de la hurasse comme se faisant équilibre.

Les forces P et N' étant sensiblement parallèles, la pression sur les tourillons est :

dans les marteaux à bascule . . . . . $P + N'$

dans les marteaux frontaux ou à soulèvement . . . . . $P - N'$

Le frottement sera

$$\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}(P \pm N') \quad \text{ou} \quad f_1(P \pm N').$$

Le travail de N' est égal à celui de P et du frottement : ainsi en appelant ρ le rayon du tourillon de la hurasse, et remarquant que le chemin décrit par la circonférence de ce tourillon est $y \cdot \frac{\rho}{R}$ on a

$$N' y = P h + f_1 y \frac{\rho}{R}(P \pm N')$$

d'où le travail exercé par la came sur le marteau

$$N' y = \frac{P\left(h + f_1 y \frac{\rho}{R}\right)}{1 \pm f_1 \frac{\rho}{R}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,9\,]$$

269. Le moteur doit fournir en outre un travail égal à celui du frottement sur les tourillons de l'arbre à cames et de la came contre le manche du marteau.

Soit P' la pression exercée sur les tourillons de l'arbre, cette force peu différente du poids de cet arbre. Si l'on désigne par ρ' le rayon des tourillons, le travail du frottement qu'ils reçoivent pendant la seconde période est

$$f_1 P' y \frac{\rho'}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,10\,]$$

D'après la théorie du frottement des engrenages (7), le travail du frottement de la came pendant le même temps est

$$N' y \cdot f_1 \frac{y}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,11\,]$$

En résumé le travail résistant subi par l'arbre à cames pendant cette période se compose des trois parties ci-dessus déterminées [9], [10] et [11] ; il est

$$\tau_2 = P' \frac{h + f_1 y \frac{\rho}{R}}{1 \pm f_1 \frac{\rho}{R}}\left(1 + \frac{1}{2} f_1 y\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'_E}\right)\right) + f_1 P' y \frac{\rho}{R'} \quad \ldots\ldots [\,12\,]$$

270. L'arbre à cames pendant sa marche à vide, n'est soumis à aucune autre force résistante que celle du frottement sur ses tourillons.

Soit P'' la pression qu'ils éprouvent et qu'on peut faire approximativement égale au poids de l'arbre à cames quoiqu'elle doive dépendre pour une petite partie de l'action du moteur.

Si l'on désigne par y' le chemin que décrit la came depuis l'instant où elle a quitté le manche du marteau jusqu'à celui où la came suivante vient le choquer le travail du frottement pendant cette période sera

$$\tau 3 = f_1 P'' \cdot y' \cdot \frac{\rho'}{R'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\,13\,]$$

On remarquera que $y + y'$ forme l'intervalle de deux cames consécutives, égal à $\frac{2 \Pi R'}{C}$, le nombre de cames étant C.

271. Le travail à fournir pour le moteur sur l'arbre à cames, dont le mouvement doit être périodiquement uniforme, est évidemment pour chaque coups de marteau égal à la somme des quantités τ_1 , τ_2 , τ_3 données par les formules [8], [12] et [13].

On en conclura aisément l'intensité du travail moteur par seconde.

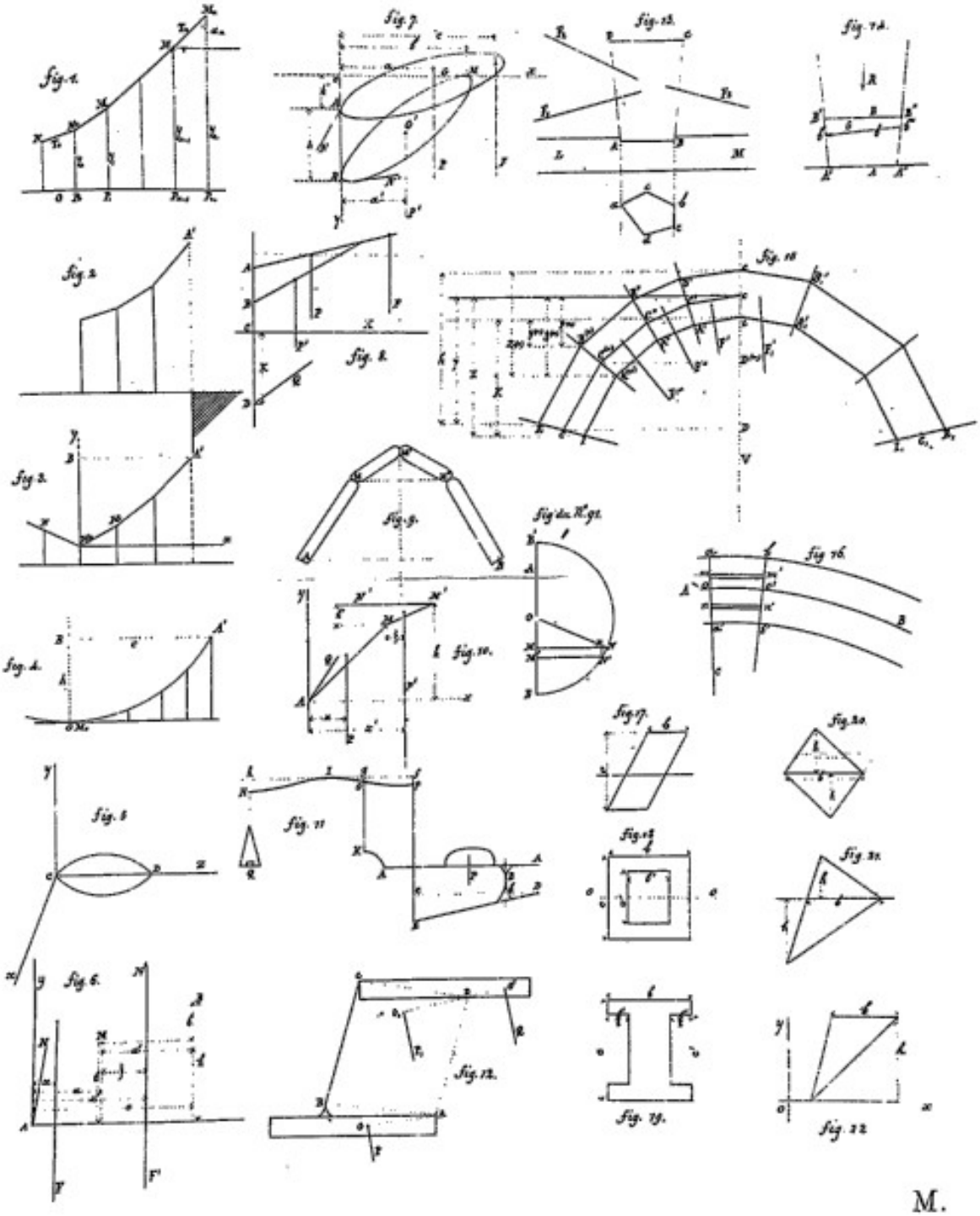


fig. 1.
fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5
fig. 6.
fig. 7.
fig. 8.
fig. 9.
fig. 10.
fig. 11
fig. 12.
fig. 13.
fig. 14.
fig. 15.
fig. 16.
fig. 17.
fig. 18
fig. 19.
fig. 20
fig. 21.
fig. 22

M.

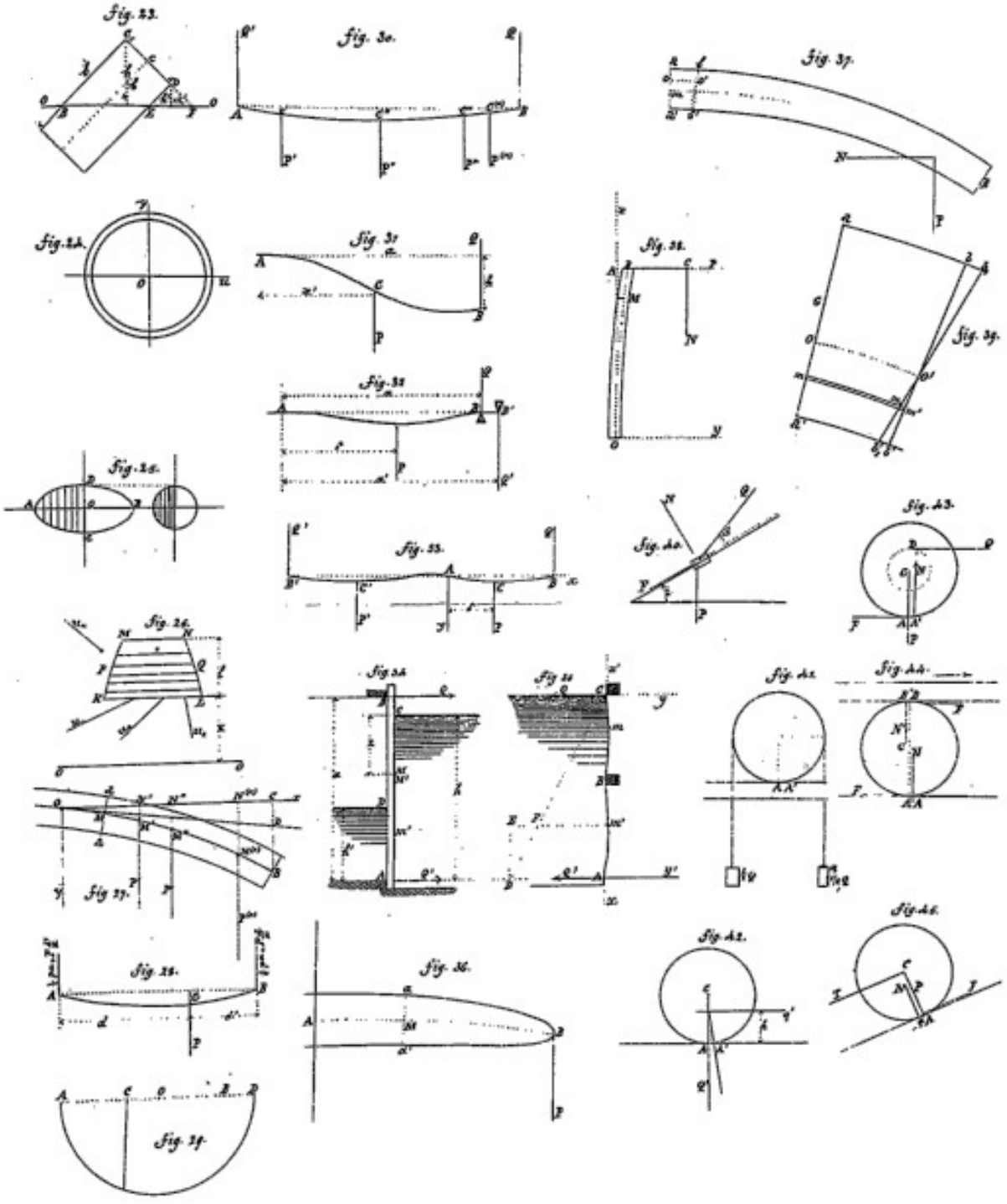
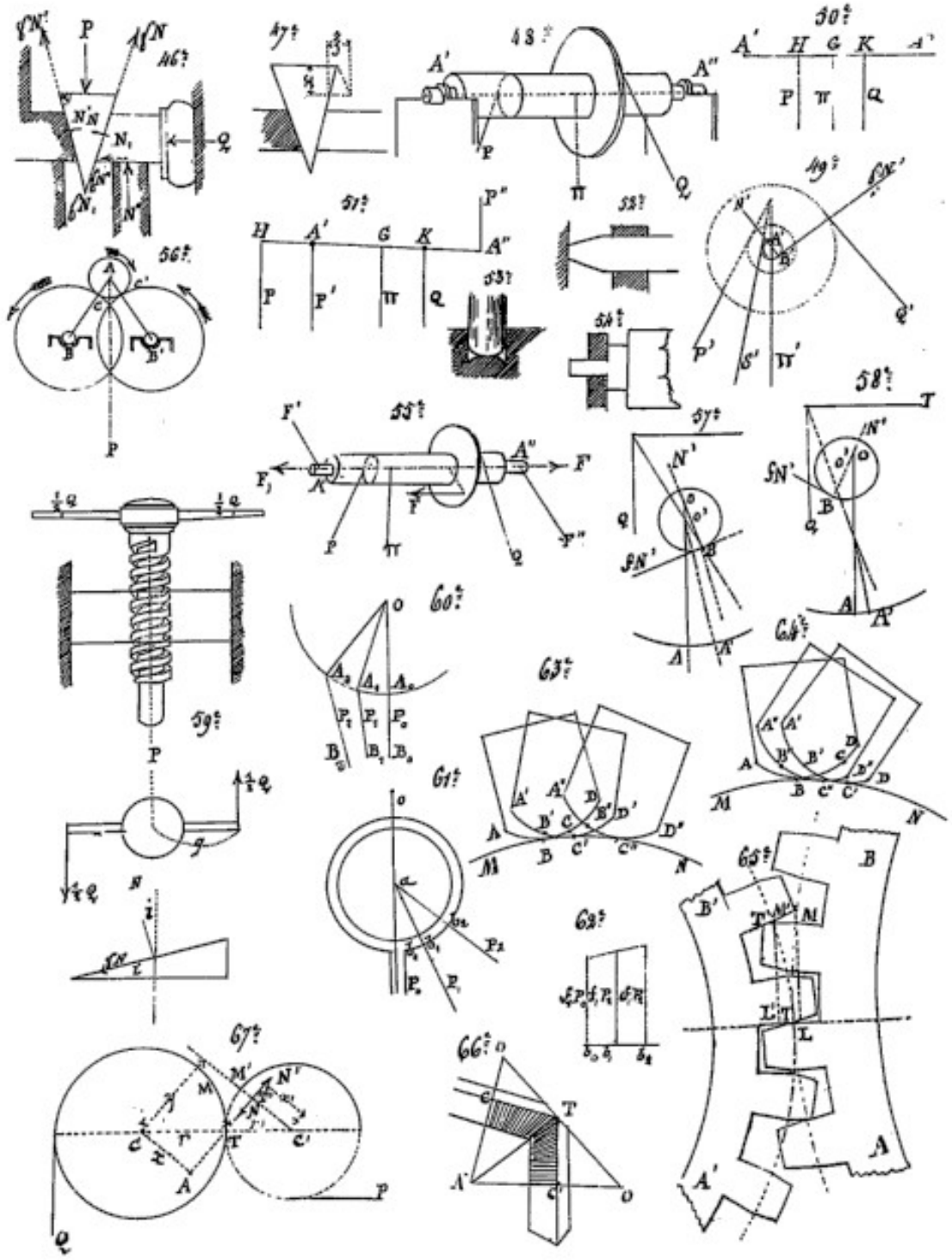


Fig. 23.
Fig. 30.
Fig. 37.
Fig. 24.
Fig. 31.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 32.
Fig. 25.
Fig. 33.
Fig. 40.
Fig. 43.
Fig. 26.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 41.
Fig. 44.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 36.
Fig. 42.
Fig. 29.



M.

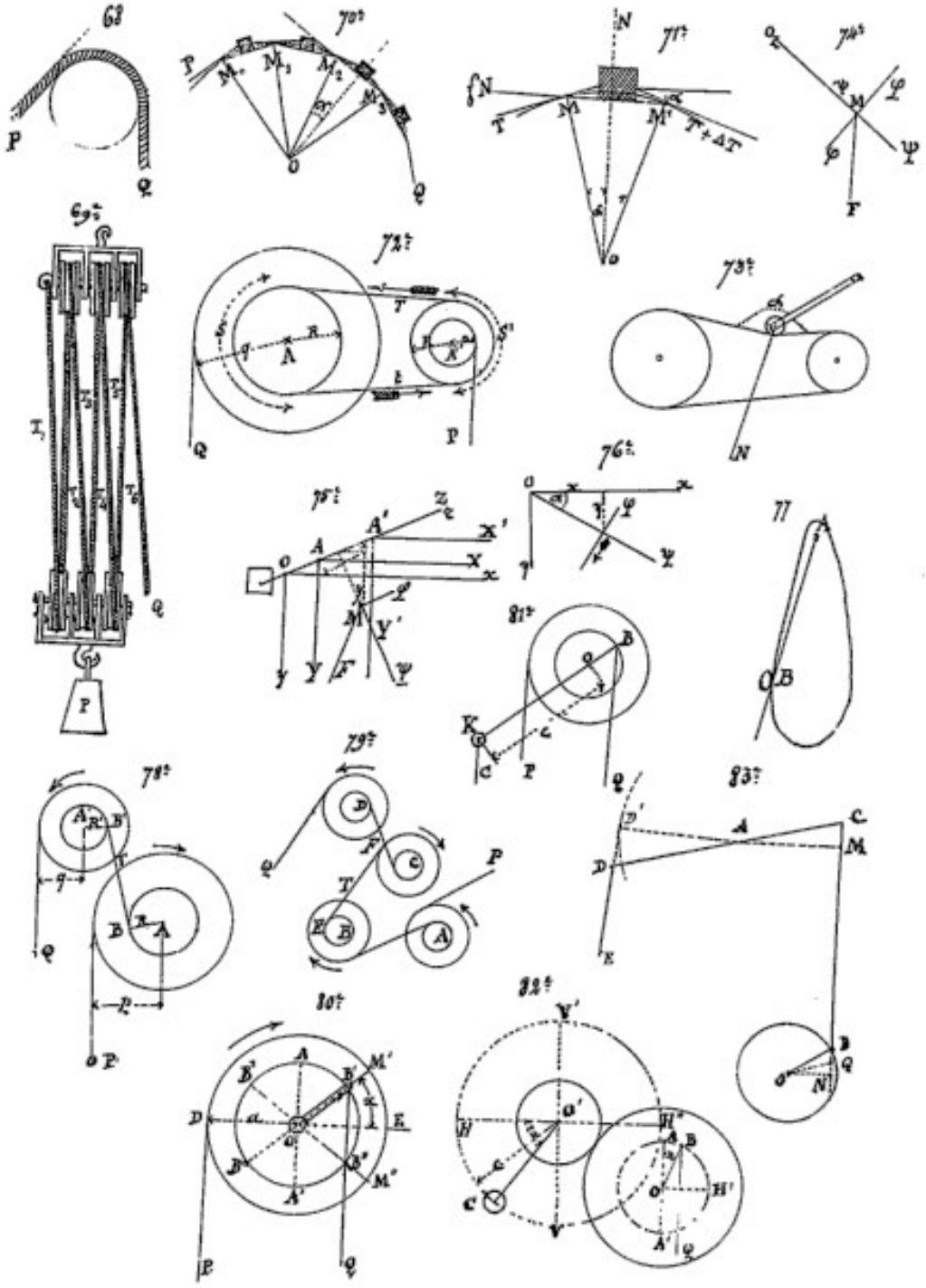


Table des matières

Notes sur la mécanique appliquée aux principes de la stabilité des constructions et à la théorie dynamique des machines....1
Chap. 1er Récapitulation des notions essentielles de la mécanique rationnelle....1
§: 1. Des diverses branches de la mécanique....1
§: 2. Du mouvement considéré indépendamment de ses causes....2
§: 3 Des forces considérées indépendamment de la mesure de leurs effets....4
§: 4. Dynamique d'un point matériel....7
1° Mouvement rectiligne....7
2° Mouvement curviligne....8
§: 5 Principes généraux du mouvement d'un système de points matériels....9
§: 6 Statique ou conditions générales de l'équilibre des corps....11
Chap. 2. Application de la statique aux systèmes articulés sans frottement....14
§:1 Théorie applicable aux ponts suspendus....14
§:2 Système polygonaux de corps solides à articulations simples....20
§: 3 Des systèmes à liaison complète....24
§: 4 Des systèmes à articulations alternatives....26
Chap. 3. De la résistance des matériaux employés dans les constructions....33
§:1 Prismes tirés ou comprimés parallèlement à leur longueur....33
§:2 Généralités sur la flexion des prismes....37
§:3 Formules pour les moments d'inertie de diverses surfaces planes et pour les limites des moments d'élasticité correspondants....40
§: 4 Prismes soumis transversalement à une charge uniformément répartie et à des forces discontinues dans un même plan....44
1° Généralités sur ce sujet....44
2° Portions de prisme horizontal à une extrémité soumise à une force verticale à l'autre extrémité et chargée en outre uniformément sur sa longueur....46
3° Prisme posé sur deux appuis de niveau, et soumis à une force verticale P en un point C, outre une charge pa uniformément répartie sur sa longueur a - figure 28....48
4° Prisme posé sur deux appuis AB, de niveau, et soumis à des forces verticales discontinues P', P", P"' 49
5° Prisme maintenu horizontal en un point donné A, posé à une extrémité B sur un appui, soumis dans l'intervalle à une charge pa uniformément répartie sur la longueur AB ou a, et à une force distincte P appliquée au point C. (fig. 31)....51
6° Prisme maintenu horizontal en deux points AB de niveau, soumis dans l'intervalle à une charge pa uniformément répartie sur la longueur AB ou a et une force distincte P appliquée au point C....54
7° Prisme posé sur trois appuis de niveau B', A, B, soumis à une charge uniformément répartie, et à deux forces distinctes P', P aux points intermédiaires C', C. fig. 33....57

8° Aiguilles verticales supportant une charge d'eau....60
§: 5. Données expérimentales et applications....62
I Tableau de la résistance des corps à l'extension....63
II Tableau de la résistance à l'écrasement....63
§: 6. Solides d'égale résistance....64
§: 7. Prismes soumis à des forces de directions quelconques....66
§: 8. Flexion et résistance des pièces courbes....70
§: 9. Torsion des prismes....74
Chap. 4. Du frottement et de la raideur des cordes....77
§: 1 Du frottement de glissement....77
§: 2. De la résistance dite frottement de roulement....80
§: 3. Presse à coin....86
§: 4. Du treuil....87
§: 5. Formules relatives au tirage des voitures....96
§: 6. De la vis à filets carrés....98
§: 7. Frottement des boutons de manivelle ou excentriques contre leurs coussinets ou bagues....100
§: 8. Frottement mixte de roulement et de glissement ; engrenages....101
§: 9. De la raideur des cordes....105
Tableau pour calculer la raideur de différentes cordes autour d'une poulie d'un mètre de diamètre....106
§: 10. Frottement d'une corde ou d'une courroie sur un cylindre fixe....108
§:11. De la transmission du mouvement au moyen de cordes ou courroies sans fin....109
Chap. 5. Du mouvement varié des corps solides assujettis à tourner autour d'axes fixes....113
§: 1 Calcul de l'accélération angulaire....113
§:2. Pression sur les appuis....114
§: 3. Du centre de percussion....117
§: 4. Pendule balistique....118
§: 5. Pressions mutuelles des corps tournants dans le mouvement varié....119
§: 6. Des volants....121
§: 7. Des marteaux mus par des cames....129
Planche 1....135
Planche 2....136
Planche 3....137
Planche 4....138